

**Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie**

Dziedzina nauk społecznych

Dyscyplina naukowa: ekonomia i finanse

**Elżbieta Plis**

**RÓŻNORODNOŚĆ A EWOLUCJA SYSTEMU  
EKONOMICZNEGO**

Rozprawa doktorska

Promotor: dr. hab. Agnieszka Lipieta, prof. UEK

Promotor pomocniczy: dr Fryderyk Falniowski



Pamięci profesora Andrzeja Malawskiego



# Spis treści

|                                                                                            |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Wstęp</b>                                                                               | <b>1</b>  |
| <b>1. Geneza pojęcia różnorodności jako elementu modelu ekonomicznego</b>                  | <b>7</b>  |
| 1.1. Biologiczne i ekonomiczne podstawy definiowania różnorodności . . . . .               | 7         |
| 1.2. Różnorodność w ujęciu matematycznym . . . . .                                         | 10        |
| 1.2.1. Wybrane podejścia do wyznaczania różnorodności zbioru . . . . .                     | 12        |
| 1.2.2. Wybrane wskaźniki heterogeniczności zbioru . . . . .                                | 14        |
| 1.3. Różnorodność jako element ewolucyjnego podejścia w ekonomii . . . . .                 | 16        |
| 1.4. Podsumowanie . . . . .                                                                | 21        |
| <b>2. Różnorodność systemu ekonomicznego ze skończoną liczbą producentów i konsumentów</b> | <b>23</b> |
| 2.1. Różnorodność skończonego zbioru obiektów w ujęciu wieloatrybutowym . . . .            | 24        |
| 2.1.1. Podstawowe pojęcia . . . . .                                                        | 24        |
| 2.1.2. Własności funkcji różnorodności zbioru skończonego . . . . .                        | 26        |
| 2.1.3. Modele różnorodności skończonego zbioru obiektów . . . . .                          | 29        |
| 2.2. System ekonomiczny ze skończoną liczbą podmiotów . . . . .                            | 31        |

|                                                                                                          |           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 2.2.1. Definicja systemu ekonomicznego ze skończoną liczbą podmiotów . . .                               | 32        |
| 2.2.2. Zmiany ewolucyjne w systemie ekonomicznym ze skończoną liczbą podmiotów . . . . .                 | 37        |
| 2.3. Różnorodność systemu ekonomicznego ze skończoną liczbą producentów i konsumentów . . . . .          | 41        |
| 2.3.1. Funkcja różnorodności w przestrzeni towarów w modelu ze skończoną liczbą konsumentów . . . . .    | 41        |
| 2.3.2. Funkcja różnorodności w systemie ekonomicznym ze skończoną liczbą podmiotów . . . . .             | 44        |
| 2.4. Podsumowanie . . . . .                                                                              | 45        |
| <b>3. Wpływ zmian ewolucyjnych na różnorodność systemu ekonomicznego ze skończoną liczbą podmiotów</b>   | <b>47</b> |
| 3.1. Różnorodność a ewolucja systemu ekonomicznego ze skończoną liczbą podmiotów ekonomicznych . . . . . | 48        |
| 3.1.1. Zmiana różnorodności systemu ekonomicznego . . . . .                                              | 49        |
| 3.1.2. Innowacje i istotne innowacje w systemie ekonomicznym . . . . .                                   | 50        |
| 3.1.3. Różnorodność a twórcza destrukcja systemu ekonomicznego . . . . .                                 | 52        |
| 3.2. Różnorodność a mechanizmy ewolucji ekonomicznej . . . . .                                           | 54        |
| 3.2.1. Mechanizm ekonomiczny w ujęciu L. Hurwicza . . . . .                                              | 54        |
| 3.2.2. System ekonomiczny jako środowisko hurwiczowskiego mechanizmu . .                                 | 55        |
| 3.2.3. Mechanizmy ewolucji schumpeterowskiej . . . . .                                                   | 57        |
| 3.2.4. Różnorodność a mechanizmy ewolucji schumpeterowskiej . . . . .                                    | 59        |
| 3.2.5. Różnorodność a mechanizmy eko-innowacyjne . . . . .                                               | 61        |

|                                                                                 |            |
|---------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 3.3. Podsumowanie . . . . .                                                     | 64         |
| <b>4. Różnorodność w modelu gry schumpeterowskiej</b>                           | <b>67</b>  |
| 4.1. Podstawowe pojęcia ewolucyjnej teorii gier . . . . .                       | 69         |
| 4.1.1. Struktura gry populacyjnej . . . . .                                     | 71         |
| 4.1.2. Gry populacyjne o dwóch strategiach . . . . .                            | 76         |
| 4.2. Różnorodność w systemie ekonomicznym z nieprzeliczalną ilością podmiotów . | 83         |
| 4.3. Gra schumpeterowska jako gra populacyjna . . . . .                         | 87         |
| 4.3.1. Strategie schumpeterowskie . . . . .                                     | 87         |
| 4.3.2. Wypłaty ze strategii schumpeterowskich . . . . .                         | 91         |
| 4.3.3. Gra schumpeterowska . . . . .                                            | 93         |
| 4.3.4. Ewolucyjnie stabilny stan gry schumpeterowskiej . . . . .                | 95         |
| 4.3.5. Własności stanu schumpeterowskiego . . . . .                             | 96         |
| 4.3.6. Wpływ wzrostu różnorodności na postać stanu schumpeterowskiego . .       | 99         |
| 4.3.7. Rodzaje gier schumpeterowskich . . . . .                                 | 102        |
| 4.4. Podsumowanie . . . . .                                                     | 106        |
| <b>Zakończenie</b>                                                              | <b>109</b> |
| <b>Spis literatury</b>                                                          | <b>110</b> |





# Wstęp

Różnorodność i ewolucja systemu gospodarczego są pojęciami nieodłącznie związanymi: zmiany ewolucyjne, które zachodzą w pewnym systemie gospodarczym, mogą wywoływać wzrost lub spadek jego różnorodności; z drugiej strony, to jak różnorodny jest obserwowany system, może wpływać na rodzaj zachodzących w nim zmian. Analiza ewolucji dowolnego systemu powinna uwzględniać kontekst towarzyszących jej zmian różnorodności (por. Witt 1996). Dotyczy to również systemu gospodarczego.

Małowski (1999) zwraca uwagę, że należy odróżnić obiekt poznania nauki, który jest umiejscowionym w realnym świecie fragmentem obiektywnej rzeczywistości, od przedmiotu badania, będącego intencjonalnym tworem badacza, wyodrębnionym przez niego konceptualnie, jako pewne odwzorowanie fragmentu obiektywnego świata i analizowanym logicznie bądź empirycznie. W rozprawie obiektem poznania jest gospodarka (system gospodarczy), rozumiana jako „całość mechanizmów i warunków działania podmiotów gospodarczych związanych z wytwarzaniem i podziałem dóbr i usług” (por. Słownik języka polskiego). Przedmiot badania zaś stanowi pewien model gospodarki, który nazywa się ekonomią. Ekonomia jako system jest układem elementów, który ma określoną strukturę i którego elementy pozostają we wzajemnych relacjach ze sobą i ze swym otoczeniem (por. Małowski 1999). Tak rozumiany system ekonomiczny ma strukturę hierarchiczną (ibid.). Ekonomia składa się z dwóch podsystemów ekonomicznych: systemu produkcji i systemu konsumpcji. W rozprawie analizuje się ewolucję systemu ekonomicznego, rozumianą jako proces przeobrażeń tego systemu, który zachodzi pod wpływem czynników wewnętrznych i jest możliwy do zaobserwowania w czasie.

Twórcą ewolucyjnego podejścia w ekonomii jest Joseph A. Schumpeter, który jako pierwszy przedstawił koncepcję rozwoju gospodarczego wywoływanego innowacjami (Schumpeter 1934). Choć w badaniach ekonomicznych, inspirowanych myślą Schumpetera, pojęcie róż-

norodności jest obecne (zob. np. Silverberg et al. 1988; Metcalfe 1994; Ayres 1994; Safarzyńska, van den Bergh 2010; Saviotti et al. 2020; Almudi, Fatás-Villafranca 2021), to brakuje w nich precyzyjnej definicji różnorodności systemu gospodarczego oraz sposobu jej wyznaczania. Co więcej, nawet dla abstrakcyjnego zbioru obiektów stosuje się różne definicje jego różnorodności (por. np. Stirling 2007; Gravel 2008; Nehring, Puppe 2009). Przyjmuje się zazwyczaj, że dla zbioru, który składa się ze skończonej liczby elementów można zdefiniować funkcję różnorodności, określoną na rodzinie jego podzbiorów (zob. np. Gravel 2008). W roku 2002, Klaus Nehring i Clemens Puppe zaproponowali w pracy „A theory of diversity” model różnorodności skończonego zbioru obiektów, bazujący na pojęciu atrybutu, rozumianego jako podzbiór elementów posiadających określone własności (Nehring, Puppe 2002). Ten sposób definiowania różnorodności został po raz pierwszy zastosowany do zdefiniowania różnorodności technologicznej w modelu ekonomicznym w pracy (Pliś 2020). Jednak wydaje się, że naturalne pytanie o istotę związku pomiędzy ewolucją systemu gospodarczego generowaną innowacjami a różnorodnością tego systemu nie uzyskało jeszcze pełnej odpowiedzi. Stąd badania, których podsumowanie stanowi niniejsza rozprawa, miały dwa podstawowe cele, którymi były:

- I. Uogólnienie definicji różnorodności zbioru zaproponowanej przez Nehringa i Puppego (2002) na różnorodność systemu ekonomicznego.
- II. Określenie wzajemnych zależności pomiędzy zmianą różnorodności systemu ekonomicznego a jego ewolucją.

W trakcie badań poszukiwano odpowiedzi na dwa pytania dotyczące wzajemnego wpływu ewolucji systemu gospodarczego i zmian w jego różnorodności:

1. Jak w toku ewolucji gospodarki zmienia się jej różnorodność?
2. Jak zmiana różnorodności gospodarki wpływa na jej ewolucję?

Odpowiadając na powyższe pytania, w niniejszej rozprawie doktorskiej poddano weryfikacji następujące hipotezy badawcze:

- H1. Wprowadzenie innowacji jest warunkiem koniecznym i wystarczającym zwiększenia różnorodności systemu ekonomicznego.
- H2. Zmiana technologiczna, która polega na wycofaniu z użycia pewnej technologii, zmniejsza różnorodność systemu ekonomicznego.

H3. Im większy przyrost różnorodności w systemie ekonomicznym powoduje wprowadzenie innowacji, tym większa skłonność producentów do jej wprowadzenia.

Rozprawa ma charakter teoretyczny, a podstawową metodą badawczą w niej stosowaną jest metoda aksjomatyczna (zob. np. Malawski 1999). Pojęcie różnorodności systemu ekonomicznego zostało w rozprawie sformalizowane przy użyciu definicji funkcji różnorodności zbioru zaproponowanej przez Nehringa i Puppego (2002), a następnie zaimplementowane w dwóch różnych modelach gospodarki, w których rozważano skończoną liczbę towarów.

Pierwszy z modeli czerpie inspirację z teorii równowagi ogólnej (por. Arrow, Debreu 1954), a drugi wpisuje się w podejście znane z ewolucyjnej teorii gier (zob. Sandholm 2010b). W pierwszym modelu zbiory producentów i konsumentów są skończone, a ewolucję ekonomii rozważa się w czasie dyskretnym, analizując kolejne transformacje systemów: produkcji i konsumpcji pod kątem wprowadzanych innowacji. Do analizy roli różnorodności w prezentowanym modelu, użyto w rozprawie narzędzi teorii projektowania mechanizmów ekonomicznych (zob. np. Hurwicz 1986). W drugim z analizowanych w rozprawie modeli, rozważano w czasie ciągłym zmiany zachodzące w systemie ekonomicznym z nieskończoną ilością podmiotów, a zachodzącą konkurencję schumpeterowską przedstawiono w postaci gry populacyjnej, w której wypłatach został uwzględniony wzrost różnorodności związany z wprowadzaniem innowacji. Wyznaczając ewolucyjnie stabilne stany populacji (zob. Thomas 1984), zbadano jak wzrost różnorodności związany z wprowadzaniem innowacji zmienia strukturę systemu ekonomicznego, a w szczególności, jak wpływa na odsetek producentów, którzy decydują się na wprowadzenie innowacji. Zdefiniowanie i analiza dwóch różnych modeli, pozwoliły na wyjaśnienie w jaki sposób powstaje nowość w badanym obszarze oraz jakie są skutki jej pojawienia się (por. Witt 1999). W żadnym z modeli analizowanych w rozprawie nie zakładano ani pełnego dostępu do informacji, ani racjonalności działań podmiotów gospodarczych (por. Simon 1955). W obu modelach procesy zachodzące w gospodarce badano na podstawie specyfiki zachowań uczestników rynku. Za najbardziej metodologicznie właściwe do teoretycznej analizy procesów makroekonomicznych, uznał tego rodzaju modele Weintraub (1979) w książce pt. „Microfoundations: the compatibility of microeconomics and macroeconomics” (zob. też Roth, Erev 1995; Erev, Roth 1998).

W pierwszym rozdziale rozprawy omówiono genezę pojęcia różnorodności w badaniach ekonomicznych, scharakteryzowano często używane koncepcje różnorodności abstrakcyj-

nego zbioru obiektów, a także wskazano, gdzie pojęcie różnorodności jest stosowane we współczesnej analizie ekonomicznej.

Badania opisane w rozdziale drugim służyły realizacji pierwszego z celów rozprawy, czyli uogólnieniu definicji różnorodności zbioru na różnorodność systemu ekonomicznego. W rozdziale tym przedstawiono pojęcie funkcji różnorodności określonej dla podzbiorów zbioru skończonego, zaproponowane przez Nehringa i Puppego (2002) oraz zaprezentowano rozważany w czasie dyskretnym model ewolucji systemu gospodarczego, w którym działa skończona liczba producentów i konsumentów, których w rozprawie nazywa się podmiotami ekonomicznymi, albo krótko podmiotami. Główne wyniki tego rozdziału obejmują: zdefiniowanie funkcji różnorodności w przestrzeni towarów oraz określenie definicji różnorodności systemu ekonomicznego ze skończoną liczbą podmiotów. Wyniki zaprezentowane w rozdziale drugim są rozszerzeniem wyników z pracy (Pliś 2020).

W celu odpowiedzi na pierwsze z pytań badawczych stawianych w rozprawie, w trzecim rozdziale użyto, wprowadzonej wcześniej, definicji różnorodności systemu ekonomicznego do analizy zmian ewolucyjnych w systemie ekonomicznym ze skończoną liczbą podmiotów. Zmiany te analizowano w czasie dyskretnym, jak to zostało opisane w rozdziale drugim. W rozdziale trzecim zweryfikowano hipotezy badawcze H1 oraz H2, mówiące o wpływie wprowadzanych innowacji oraz zachodzącej twórczej destrukcji na różnorodność systemu ekonomicznego. Użyto w tym celu narzędzi teorii mnogości, topologii oraz twierdzeń analizy matematycznej. Wyniki otrzymane w tym rozdziale zostały w dużej części opublikowane w pracach (Pliś 2020) oraz (Lipieta, Pliś 2022).

Ostatni rozdział rozprawy opisuje badania mające na celu uzyskanie odpowiedzi na drugie z pytań badawczych. Zawiera on autorski model konkurencji schumpeterowskiej. W rozdziale tym, posługując się narzędziami układów dynamicznych oraz teorii gier, poddano weryfikacji ostatnią z hipotez badawczych, dotyczącą wpływu przyrostu różnorodności w systemie ekonomicznym spowodowanego wprowadzeniem innowacji na skłonność producentów do jej wprowadzenia.

## **Podziękowania**

Serdecznie dziękuję dr hab. Agnieszce Lipiecie za opiekę merytoryczną, nadanie właściwego kierunku prowadzonym badaniom, okazaną życzliwość i stałą zachętę do pracy. Dziękuję również dr Fryderykowi Falniowskiemu za ofiarowane wsparcie merytoryczne, wskazanie nowego kierunku badań i czas poświęcony na dyskusje.

Dziękuję prof. Tadeuszowi Staniszowi za cenne uwagi, a także dr hab. Annie Pajor, za wsparcie okazane przy pisaniu niniejszej rozprawy.

Mojemu mężowi Szymonowi i naszym dzieciom: Joannie, Katarzynie, Andrzejowi i Klarze, dziękuję, że towarzyszyli mi i motywowali do działania.



# Rozdział 1

## Geneza pojęcia różnorodności jako elementu modelu ekonomicznego

Różnorodność jest przedmiotem zainteresowania wielu dziedzin nauki. Pojęcie różnorodności jest obecne w literaturze ekonomicznej od końca XVIII wieku. Już u Adama Smitha (1776) różnorodność form pracy (związana z jej podziałem i specjalizacją) stanowiła jeden z czynników rosnącej wydajności pracy oraz ogólnego wzrostu gospodarczego w warunkach społecznej harmonii (Małowski, Pliś 2007). Od końca XX wieku pojęcie różnorodności jest intensywniej obecne w modelach ekonomicznych. Wykorzystuje się je między innymi do określania stopnia swobody wyboru podmiotu gospodarczego (Pattanaik, Xu 2000), rozważa jako jedną z przyczyn wzrostu gospodarczego (Pyka, Saviotti 2009), a w przypadku różnorodności biologicznej – stosuje na przykład do oceny usług zapewnianych przez środowisko naturalne (Bartkowski 2017). Najczęściej jednak pojęcie różnorodności pojawia się w związku z procesem ewolucyjnym zachodzącym w ekosystemie (więcej w tym temacie można znaleźć w pracy (Magurran 2013)) lub w systemie ekonomicznym. W tym rozdziale podjęta została próba przedstawienia pojęcia różnorodności jako kategorii ekonomicznej: jej genezy, wybranych sposobów jej definiowania oraz występowania w wybranych modelach ewolucji gospodarki.

### 1.1. Biologiczne i ekonomiczne podstawy definiowania różnorodności

Różnorodność istniejącego świata zachwycała ludzi od zawsze, wywołując w nich zdumienie i lęk (zob. np. Biblia Jerozolimska 2006, Psalm 8). Już w starożytności człowiek

poszukiwał elementów wspólnych w obserwowanych obiektach, kategoryzował te obiekty i systematyzował, a dostrzegając istniejące pomiędzy nimi różnice, pytał o ich przyczynę i konsekwencje ich istnienia. Idea zróżnicowania bytu leżała u podstaw teorii powszechnej zmienności przyrody Heraklita (por. np. Tatarkiewicz 1970), a w czasach nowożytnych była obecna m.in. w myśli Montaigne'a, w triadycznej koncepcji rozwoju świata Hegla, czy też w dialektyce Marksa i Engelsa (ibid.). Gdy z czasem z filozofii zaczęły się wyodrębniać nauki szczegółowe, pojęcie różnorodności stało się obiektem ich zainteresowania i systematycznego badania w ich ramach.

W drugiej połowie XX wieku w naukach przyrodniczych zaczął funkcjonować termin „różnorodność biologiczna” (*biological diversity*), który obecnie jest stosowany zamiennie z określeniem bioróżnorodność (*biodiversity*). Różnorodność biologiczna jest złożoną i abstrakcyjną koncepcją ekologiczną (Bartkowski et al. 2015). Wzrost bioróżnorodności jest jedną z podstawowych cech ewolucji biologicznej (Ayres 1994). Bada się m.in. bioróżnorodność genetyczną, gatunkową, filogenetyczną, taksonomiczną czy funkcjonalną (zob. Bartkowski et al. 2015). Chociaż całkowita informacja o bioróżnorodności danego systemu ekologicznego może być wyrażona tylko przez jego pełny opis, to posługiwanie się pewną wielkością liczbową określającą różnorodność ekosystemu ma swoje niewątpliwe zalety: pozwala porównywać systemy ze sobą oraz daje podstawy ilościowe obserwacji zachodzących w nich zmian. Istnieje wiele wskaźników bioróżnorodności (ibid.), konstruowanych dla różnych poziomów różnorodności biologicznej: wewnątrzgatunkowego, międzygatunkowego oraz między ekosystemami. Różnorodność biologiczną w „Konwencji o różnorodności biologicznej” ratyfikowanej przez Rzeczpospolitą Polską definiuje się jako:

„zróżnicowanie wszystkich żywych organizmów pochodzących, inter alia, z ekosystemów lądowych, morskich i innych wodnych ekosystemów oraz zespołów ekologicznych, których są one częścią. Dotyczy to różnorodności w obrębie gatunku, pomiędzy gatunkami oraz ekosystemami” (Dz.U. 2002 nr 184 poz. 1533).

Niniejsza praca skupia się na badaniu różnorodności systemu ekonomicznego. W tym kontekście, różnicowanie się społeczeństwa w „Badaniach nad naturą i przyczynami bogactwa narodów” opisywał Adam Smith (1776), który stwierdził, że naturalna skłonność człowieka do wymiany i handlu stanowi źródło zachodzącego w społeczeństwie podziału pracy:

„Bez skłonności do wymiany i handlu, każdy człowiek musiałby sam starać się dla



siebie o wszystkie potrzeby i wygody życiowe. Wszyscy umieliby spełniać takie same obowiązki i wykonywać jednakową pracę, i nie mogłaby powstać ta różnorodność zajęć, która jedynie sprowadziła może tak wielką różnorodność uzdolnień. I jak powyższa skłonność stwarza różnorodność uzdolnień, [...] tak też ta sama skłonność czyni tę różnorodność użyteczną. [...] różne wytwory odnośnych uzdolnień [...] stają się, rzecz można, wspólnym zasobem, z którego każdy człowiek może nabyć tę część wytworu uzdolnień innych ludzi, której potrzebuje” (Smith 1776, tłum. Einfeld, Wolff 1954).

Pozytywny wpływ różnorodności społeczeństwa na dobrobyt społeczny nie jest jednak zdaniem Smitha (1776) jedynie związany z podziałem pracy, ale również z „wynalazczością” społeczeństwa, która „jest w stanie kojarzyć ze sobą siły najodleglejszych i najróżnorodniejszych rzeczy” (ibid.), doprowadzając do powstawania nowych rozwiązań technologicznych. Podsumowując myśl Smitha, można zauważyć, że dywersyfikacja systemów gospodarczych, która miała miejsce w ciągu dziejów ludzkości, odbywała się poprzez zmiany dwóch rodzajów: po pierwsze przez podział pracy, po drugie przez tworzenie nowych technologii, które dawały początek nowym procesom produkcyjnym i nowym towarom (por. Saviotti et al. 2020).

Myśl Adama Smitha dotycząca wpływu „wynalazczości” na zmiany zachodzące w społeczeństwie znalazła swoją kontynuację w pracach Josepha A. Schumpetera (1934; 1942). Ten austriacki ekonomista zdefiniował proces prowadzący do powstania określonego produktu, jako ustaloną kombinację środków produkcyjnych, którymi są dostępne materiały oraz możliwe działania („*to produce means to combine the things and forces within our reach*”) (por. Schumpeter 1934). Zdaniem Schumpetera rozwój ekonomiczny (*economic development*) jest wynikiem wykorzystania w nowy sposób istniejących zasobów środków produkcyjnych systemu gospodarczego (ibid.). Zachodzące w ten sposób innowacje, polegają na (Schumpeter 1934, por. Malawski 1999):

- wprowadzeniu nowego towaru, z którym konsumenci nie byli jeszcze zaznajomieni lub też wprowadzenie nowej jakości towaru;
- wprowadzeniu nowej metody produkcji, to znaczy takiej, która nie została jeszcze sprawdzona przez doświadczenie w danej gałęzi przemysłu;
- otwarciu nowego rynku, to znaczy rynku, na którym dana gałąź produkcji nie była jeszcze

obecna, niezależnie od tego, czy rynek ten istniał wcześniej, czy nie;

- zdobyciu nowego źródła dostaw surowców lub półfabrykatów, niezależnie od tego, czy źródło to już istniało, czy też należało je najpierw stworzyć;
- wprowadzeniu nowej organizacji branży przemysłowej, np. ustanowieniu lub przełamaniu monopolu.

To tworzenie nowości (*novelty*) jest podstawowym czynnikiem ewolucji każdego systemu, a zdolność do tworzenia i rozpowszechniania nowości powoduje wytworzenie różnorodności form i zachowań w obrębie tego systemu (Witt 1999). O ile w biologii nowość polega na rekombinacji i losowej mutacji genów w puli genowej populacji, o tyle w dziedzinie ekonomii

„Tworzenie nowości, zidentyfikowane [...] jako kluczowy element endogenicznej, ewolucyjnej zmiany, może [...] być traktowane jako istotny wyraz ludzkiej wolnej woli” (Witt 1999, tłum. własne).

Nowość, czyli innowacja powstaje zatem wewnątrz systemu gospodarczego poprzez twórcze działanie przedsiębiorcy (*entrepreneur*). O ile analizowany przez Adama Smitha (1776) podział pracy we współczesnym języku nazwać można innowacją organizacyjną, to opisywana przez niego „wynalazczość” nosi emblemat innowacji technologicznej (Saviotti et al. 2020). Endogeniczna zmiana związana z tworzeniem, a następnie rozprzestrzenianiem (*dissemination*) innowacji, zmienia postać systemu gospodarczego, a zachodzące w jej wyniku podział i specjalizacja przemysłu powoduje wzrost gospodarczy (por. Young 1928).

W systemie ekonomicznym, schumpeterowski przedsiębiorca, przez poszukiwanie rozwiązań dotychczas nieznanych, przez łączenie dostępnych materiałów i działań w nowy sposób, staje się twórcą i zmienia różnorodność gospodarczą.

## 1.2. Różnorodność w ujęciu matematycznym

Scott E. Page w książce pt. „Diversity and complexity” (Page 2011) zauważa, że różnorodność jest własnością, która charakteryzuje złożony (*complex*) system, którego składowe wchodzi ze sobą w interakcje i wzajemnie na siebie wpływają. Miara różnorodności złożonego

systemu wymaga ustalenia co dokładnie się mierzy i porównuje, ponieważ ta sama liczba wyznaczająca różnorodność dwóch różnych systemów nie gwarantuje istnienia między nimi żadnego podobieństwa. Page (ibid.) rozróżnia trzy poziomy na których można mierzyć różnorodność systemu. Może ona dotyczyć:

- różnic w obrębie danego typu obiektów, czyli zmienności w obrębie pewnej cechy, która to zmienność powoduje, że poszczególne obiekty danego typu różnią się między sobą;
- różnic pomiędzy rodzajami obiektów, które są związane z ich naturą lub funkcją;
- różnic w składzie badanej grupy obiektów, które dotyczą tego jakie elementy i w jakich proporcjach tworzą daną strukturę.

U podstaw definiowania różnorodności systemu leży pojęcie różnorodności zbioru. Istnieją dwa główne podejścia do definiowania różnorodności abstrakcyjnego zbioru obiektów: jedno z nich opiera się na heterogeniczności, czyli niejednorodności elementów zbioru, drugie jest podejściem ontologicznym, które wymaga spojrzenia na zbiór jako na fragment większej całości (Nehring, Puppe 2002). Nehring i Puppe (2002) tłumaczą wprowadzone rozróżnienie pomiędzy heterogenicznością a różnorodnością zbioru poprzez różnice jakie zachodzą w odpowiedzi na pytanie o to, jak może zmienić się wartość heterogeniczności, albo różnorodności zbioru, po dołączeniu do niego kolejnego elementu. Dodanie kolejnego elementu do zbioru może obniżyć heterogeniczność poprzez ujednolicenie elementów zbioru, natomiast różnorodność zbioru rozumiana ontologicznie nie może się w ten sposób zmniejszyć, a co najwyżej zwiększyć, ponieważ dodatkowy element może wnieść do zbioru nową jakość. Heterogeniczność znalazła głównie zastosowanie w ekologii jako miara bioróżnorodności, natomiast podejście ontologiczne jest zazwyczaj stosowane w ekonomii (por. np. Pattanaik, Xu 2000; Bavetta, Del Seta 2001; Lipieta, Pliś 2022). Przegląd różnych koncepcji wyznaczania różnorodności zbioru z uwzględnieniem podziału na różnorodność ontologiczną i heterogeniczność znaleźć można m. in. w pracach: Gravela (2008), Nehringa i Puppego (2009) oraz Baumgärtnera (2004). W niniejszej rozprawie sformułowanie „różnorodność zbioru” będzie zarezerwowane dla różnorodności rozumianej ontologicznie. Poniżej przedstawione zostały wybrane, istotne dla rozprawy, podejścia do definiowania różnorodności i heterogeniczności zbioru.

### 1.2.1. Wybrane podejścia do wyznaczania różnorodności zbioru

Niech  $X$  będzie niepustym i skończonym zbiorem, a  $2^X := \{D : D \subset X\}$  niech oznacza rodzinę jego podzbiorów.

Pierwsza z obecnych w literaturze propozycji definiowania różnorodności zbioru skończonego  $X$ , opiera się na podobieństwach istniejących pomiędzy jego elementami. Bavetta i Del Seta (2001) określili relację podobieństwa  $S \subset X \times X$  jako relację równoważności (zob. np. Kuratowski 1962) i na jej bazie zdefiniowali różnorodność dowolnego podzbioru  $D \subset X$  oznaczoną przez  $\nu(D)$ , jako liczbę klas równoważności relacji  $S$  w zbiorze  $D$ , tzn. jako liczbę

$$\nu(D) := \#\{[x] \subset X : [x] \cap D \neq \emptyset\}, \quad (1.1)$$

gdzie zbiór  $[x]$  stanowi klasę równoważności elementu  $x \in X$ . Wówczas funkcja różnorodności  $\nu : 2^X \rightarrow [0, +\infty)$ , każdemu podzbiorkowi zbioru  $X$  przypisuje wartość określoną wzorem (1.1). Pattanaik i Xu (2000) zaproponowali podobne, choć bardziej ogólne, podejście do porównywania podzbiorów pod kątem ich różnorodności, Bervoets i Gravel (2007) podjęli próbę udoskonalenia tego podejścia przez uwzględnienie relacji zachodzącej pomiędzy parami obiektów zbioru  $X$ , natomiast Gravel (2008) omówił własności jakie musi spełniać relacja porządkująca podzbiory zbioru  $X$  ze względu na ich rosnącą różnorodność tak, by istniała zadawana przez nią funkcja różnorodności. Różnorodność definiowania na bazie podobieństw pomiędzy elementami zbioru znajduje zastosowanie m. in. do określania swobody wyboru podmiotów gospodarczych (zob. np. Bavetta, Del Seta 2001)

Alternatywnie do porządkowania podzbiorów danego zbioru ze względu na różnorodność wyznaczaną przez podobieństwa istniejące między jego elementami, w literaturze ekonomicznej funkcjonuje podejście, w którym bierze się pod uwagę ilościowe różnice zachodzące pomiędzy elementami skończonego zbioru  $X$ . Martin Weitzmann (1992; 1998) sformułował następujący problem, zwany w literaturze problemem Noego (zob. Weitzman 1998): Jeśli przyjmie się, że arka Noego może pomieścić  $n$  par zwierząt różnych gatunków i w arce znajduje się już ustalone  $n - 1$  par zwierząt, to mając wybór pomiędzy dwoma gatunkami, którego gatunku parę powinien Noe wprowadzić do arki? Odpowiedź na to pytanie, według Weitzmana, zależy od krańcowej różnorodności każdego z gatunków w stosunku do zbioru gatunków  $D$  znajdujących się już w arce. Mianowicie Noe powinien wprowadzić do swojej arki ten gatunek, którego różno-

rodność krańcowa jest większa. Weitzman (1998) definiuje *różnorodność krańcową* dowolnego podzbioru  $D$  zbioru skończonego  $X$  dla ustalonego elementu  $x \in X$  jako wartość wyrażenia

$$\nu(D \cup \{x\}) - \nu(D) = \min_{y \in D} d(x, y), \quad (1.2)$$

gdzie  $d(x, y)$  określa wartość różnicy pomiędzy elementami  $x, y \in X$  zadaną przez wartość pewnej funkcji  $d: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$  takiej, że  $d(x, x) = 0$  oraz  $d(x, y) = d(y, x)$  dla wszystkich  $x, y \in X$ . W oparciu o rozwiązanie problemu Noego, Weitzman (1998) zaproponował rekurencyjny sposób wyznaczania różnorodności dowolnego podzbioru zbioru skończonego. Podejście Weitzmana (1992; 1998), które zakłada precyzyjną wiedzę o ilościowych różnicach pomiędzy poszczególnymi elementami zbioru, znalazło zastosowanie m. in. w biologii, gdzie jest wykorzystywane do badania różnorodności filogenetycznej gatunków (zob. np. Bartkowski 2017; Gerber et al. 2018). W tym przypadku, różnica między dwoma gatunkami jest równa łącznej odległości każdego z gatunków od ich ostatniego wspólnego przodka. Ogólny problem dotyczący skonstruowania odpowiedniej funkcji różnorodności na podstawie różnic pomiędzy elementami zbioru ukazany został w szerszej perspektywie w pracy (van Hees 2004). Teoretyczne podstawy i formalizacja podejścia Weitzmana zostały omówione w pracy (Bossert et al. 2003).

Oba przedstawione powyżej podejścia do wyznaczania różnorodności zbioru: pierwsze – oparte na podobieństwach oraz drugie – inkorporujące różnice pomiędzy elementami zbioru, zostały połączone w jedno przez Klausa Nehringa i Clemensa Puppe w ich pracy pt. „A theory of diversity”. W tej pracy, opublikowanej w 2002 r., autorzy przedstawili oryginalny „wieloatrybutowy” model różnorodności dla skończonego zbioru obiektów. Nehring i Puppe (2002) oparli swoją teorię różnorodności na pojęciu atrybutu. Atrybut stanowi pewną cechę elementów zbioru rozumianą ekstensywnie (Malawski, Pliś 2007), tzn. atrybut jest utożsamiony z podzbiorem elementów, które go posiadają. Gdy każdy atrybut ma przypisana określoną wagę, to różnorodność dowolnego podzbioru zbioru skończonego  $D \subset X$  wyznaczyć można przez zsumowanie wag wszystkich tych atrybutów, które są w posiadaniu elementów zbioru  $D$  (Nehring, Puppe 2002). Nehring i Puppe (2002) rozwinęli swoją koncepcję różnorodności w serii artykułów (Nehring, Puppe 2003; 2004a; 2004b; 2009). Wykorzystano ją m. in. do modelowania komplementarności kosztów dla spółek *joint venture* (Nehring, Puppe 2004a), do badania swobody wyboru kon-

sumentów (Sher 2018; 2020), jak również do porównywania preferencji różnych grup społecznych (Ammann, Puppe 2024). Koncepcja różnorodności zaprezentowana przez Nehringa i Puppe (2002) zostanie dokładnie omówiona, a następnie zastosowana do wyznaczania różnorodności systemu ekonomicznego w niniejszej rozprawie.

### 1.2.2. Wybrane wskaźniki heterogeniczności zbioru

W celu jasnego rozgraniczenia pojęć: różnorodność i heterogeniczność, z których pierwsze jest przedmiotem niniejszej pracy, a drugie ma ugruntowaną pozycję w naukach biologicznych, poniżej omówiono wybrane sposoby wyznaczania heterogeniczności zbioru.

W literaturze, zwłaszcza dotyczącej bioróżnorodności, rozpatruje się wiele wskaźników, których konstrukcja oparta jest zazwyczaj na względnej częstotliwości występowania obiektów w danym zbiorze. W kontekście bioróżnorodności mogą to być wskaźniki bazujące na liczebności gatunkowej w danym ekosystemie, a w ekonomii – na liczebności różnych grup, które zamieszkują dany obszar (zob. np. Abascal, Baldassarri 2020). Do wyznaczania heterogeniczności często stosowane są wskaźniki oparte na pojęciu entropii (Simpson 1949; Shannon 1948; Rényi 1961; Hirschman 1964; Havrda, Charvat 1968; Berger, Parker 1970; Nayak 1985; Tsallis 1988; Falniowski 2020; Tomezsko et al. 2020).

Niech  $D \subset X$  będzie zbiorem o liczebności  $n = 1, 2, \dots$ , którego elementy można podzielić na  $l$  grup. Dla wygody przyjmuje się, że zbiór  $D$  jest zbiorem organizmów, a liczba  $l$  ( $l \leq n$ ) określa ilość gatunków występujących w zbiorze  $D$ . Zakłada się przy tym, że osobniki przynależące do tego samego gatunku są nierozróżnialne. Liczbę  $l$  nazywa się *bogactwem gatunkowym* zbioru  $D$  (Magurran 2013). Jeśli  $k_i > 0$  oznacza liczebność gatunku  $i$  w zbiorze  $D$  (tzn.  $k_i < n$  oraz  $k_1 + \dots + k_l = n$ ), to wektor  $q = (q_1, \dots, q_l)$ , gdzie  $q_i = \frac{k_i}{n}$  nazywa się *wektorem względnej liczebności gatunkowej* zbioru  $D$ .

Na bazie bogactwa gatunkowego  $l$  oraz wektora  $q$ , który niesie informację o liczebności poszczególnych gatunków konstruuje się wskaźniki heterogeniczności zbioru  $D$  postaci:

$$\nu_\delta(l, q) := \left( \sum_{i=1}^l q_i^\delta \right)^{\frac{1}{1-\delta}}, \quad (1.3)$$

gdzie  $\delta \in [0, 1) \cup (1, +\infty]$  jest ustalonym parametrem. Wskaźniki postaci (1.3) często stosuje

się również w przekształconej formie:

$$H_\delta(l, q) := \log_2 \nu_\delta(l, q) = \frac{1}{1 - \delta} \log_2 \sum_{i=1}^l q_i^\delta, \quad \delta \neq 1 \quad (1.4)$$

i wówczas wartość określoną wzorem (1.4) nazywa się *entropią zbioru  $D$  rzędu  $\delta$*  (por. Rényi 1961). Heterogeniczność zbioru określona wzorem (1.3) stanowi podstawę powszechnie używanych wskaźników bioróżnorodności, którymi są (Baumgärtner 2004):

- dla  $\delta = 0$ , bogactwo gatunkowe zbioru  $D$  równe  $l$ ;
- dla  $\delta = 2$ , wskaźnik Simpsona (1949) znany w ekonomii jako wskaźnik Herfindahla;
- dla  $\delta = +\infty$ , wskaźnik Bergera-Parkera (1970):

$$\nu_\delta(l, q) = \frac{1}{q_{\bar{i}}},$$

gdzie  $\bar{i} \in \{1, \dots, l\}$  reprezentuje gatunek o największej liczebności w zbiorze  $D$ .

Przechodząc z  $\delta$  do 1, uzyskuje się wzór na entropię Shanona (1948), za pomocą której określa się tzw. wskaźnik Shannona-Wienera, zdefiniowany następująco (Hill 1973, Wiener 1948):

$$\nu_1(l, q) := \exp \left( - \sum_{i=1}^l q_i \log q_i \right). \quad (1.5)$$

Można zauważyć (Baumgärtner 2004), że im większa wartość parametru  $\delta \geq 0$ , tym większy wpływ na wartość  $\nu_\delta(l, q)$  mają te gatunki w zbiorze  $D$ , których liczebność jest duża. W przypadku, gdy  $\delta \rightarrow +\infty$ , liczebność najszerzej reprezentowanego gatunku staje się jedynym czynnikiem decydującym o bioróżnorodności zbioru. Dla ustalonego  $\delta$ , wartość  $\nu_\delta(l, q)$  rośnie wraz ze wzrostem liczby gatunków  $l$ . Dla danych wartości  $\delta$  oraz  $l$ , wskaźnik dany wzorem (1.3) przyjmuje wartość największą (równą  $l$ ), gdy wszystkie gatunki w zbiorze  $D$  są równoliczne. Magguran (2013) zauważyła, że wybór odpowiedniego wskaźnika nie jest łatwy, również ze względu na to, że istnieje nieskończenie wiele sposobów jego określenia. Shorrocks (1984) scharakteryzował właściwości indeksów danych wzorem (1.3) w kontekście miary nierówności dochodu. Baumgärtner (2004) spostrzegł, że konstrukcja wskaźników heterogeniczności opiera się na ostrym podziale: dwa dowolne elementy zbioru są albo różne, albo identyczne, co wyklucza możliwość uwzględnienia ich cech wspólnych.

Stirling (2007) stwierdził, że ma sens opisywanie dowolnego zbioru obiektów przy pomocy trzech liczb, z których pierwsza mierzy rozrzut jego elementów (*variety*) i w przypadku bioróżnorodności oznacza bogactwo gatunkowe, druga wyznacza ich zrównoważenie (*balance*) i może być wyrażona przez któryś z indeksów heterogeniczności, a trzecia określa zróżnicowanie (*disparity*) i odnosi się do różnic pomiędzy poszczególnymi gatunkami; różnice te mogą być wyznaczone podobnie jak w podejściu Weitzmana (1992;1998) przedstawionym powyżej. Wszystkie trzy wymienione charakterystyki, tzn. rozrzut, zrównoważenie i zróżnicowanie, są wzajemnie związane i na ich bazie Stirling (2007) zaproponował konstrukcję innego wskaźnika danego wzorem:

$$\nu(D) = \sum_{i,j=1, i \neq j}^l d_{ij} q_i q_j, \quad (1.6)$$

gdzie liczba  $d_{ij} \geq 0$  wyraża różnicę pomiędzy osobnikami gatunku  $i$  oraz  $j$ , natomiast  $q_i$  oraz  $q_j$  określają względną liczebność tych gatunków. Podejście Stirlinga, w którym obecna jest zarówno różnorodność jak i heterogeniczność zbioru, znalazło zastosowanie w badaniach empirycznych (zob. np. Woerter 2009; Cooke et al. 2013).

### 1.3. Różnorodność jako element ewolucyjnego podejścia w ekonomii

Za inicjatora podejścia ewolucyjnego w ekonomii uważa się Josepha A. Schumpetera, który w swojej książce pt. „Die Theorie der wirtschaftlichen Entwicklung” wydanej po raz pierwszy w roku 1912, a przetłumaczonej na język angielski w roku 1934, określił czym jest rozwój gospodarczy. Schumpeter zdefiniował go jako taką zmianę zachodzącą w systemie gospodarczym, która jest endogeniczna (czyli jest wywoływana przez czynniki wewnętrzne) i nieciągła (w znaczeniu: duża, przełomowa). Schumpeter szczegółowo wytłumaczył na czym polega rozwój gospodarczy w książce pt. „Kapitalizm, socjalizm, demokracja” (Schumpeter 1942). Za podstawowy bodziec, który wprawia gospodarkę w ruch, uznał on wprowadzane przez kapitalistyczne przedsiębiorstwo innowacje, które

„ilustrują ten sam proces przemysłowej mutacji – jeżeli mogę użyć tego biologicznego terminu – który nieustannie rewolucjonizuje *od środka* strukturę gospodarczą, nieustannie burzy starą i ciągle tworzy nową. Ten proces „twórczego burzenia” jest



faktem o zasadniczym znaczeniu dla kapitalizmu” (ibid.).

W latach 80 XX wieku, Richard R. Nelson i Sidney G. Winter (1982) zainspirowani schumpeterowską wizją rozwoju gospodarczego, stworzyli dynamiczny model ewolucji gospodarki respektujący paradygmat ograniczonej racjonalności podmiotów ekonomicznych. Zainicjowali w ten sposób tzw. analizę neoschumpeterowską reprezentowaną np. w pracach: Freeman 1982; Dosi, Nelson 1994; Malerba, Orsenigo 1995; Witt 1996; Hanusch, Pyka 2007; Andersen 2009; Saviotti, Pyka 2009; Foster 2011; Cantner 2016; Nelson 2016; Fontana et al. 2021. Niedługo po książce Nelsona i Wintera (1982), został opublikowany artykuł Philippe Aghiona i Petera Howitta „A Model of Growth Through Creative Destruction” (1992), dając początek teorii endogenicznego wzrostu gospodarczego (zob. Aghion, Howitt 1998; Acemoglu 2009; Aghion et al. 2015). Powstały również modele makroekonomiczne uwzględniające przesłanki Schumpetera (zob. np. Dosi et al. 2010; Assenza et al. 2015; Almudi et al. 2020, Dawid et al. 2019; Almudi, Fatás-Villafranca 2021).

Nieprzerwanie od czasów Schumpetera rozwój gospodarczy inicjowany innowacjami, w tym innowacjami finansowymi, jest obiektem analiz, w których wykorzystywane są m.in. metody ilościowe (Dosi, Nelson 2010), teoria gier (Holm 2016), czy teoria modelowania mechanizmów ekonomicznych (Lipietz, Malawski 2016). Użycie narzędzi ewolucyjnej teorii gier umożliwiło na przykład zbadanie jak awersja do ryzyka wpływa na innowacyjność firm (Beauchêne 2019), czy też wskazanie możliwości powstania ewolucyjnie stabilnej populacji schumpeterowskich producentów (Andersen 2007). Z kolei modelowanie mechanizmów ewolucji gospodarki w aparacie pojęciowym L. Hurwicza (1986) pozwoliło na przeanalizowanie roli informacji w procesach rozwoju gospodarczego, zbadanie własności jakościowych mechanizmów oraz wyznaczenie, w pewnych sytuacjach, mechanizmów optymalnych. Szczegółowe wyniki na ten temat można znaleźć w pracach: Lipietz 2018; Lipietz, Malawski 2016; 2018; 2021; Lipietz, Ćwięczek 2022 oraz Lipietz, Lipietz 2023.

W ewolucyjnym podejściu do analizy ekonomicznej pojęcie różnorodności (*diversity*) jest często używane, różnie formalizowane i stosowane wymiennie z pojęciem zróżnicowania (*variety*) (zob. np. Dosi, Nelson 1994; Metcalfe 1994). Koncepcję różnorodności uwzględniają jednak w swoich badaniach również ekonomiści spoza tego nurtu, jak np. Aghion i Howitt (1992) czy Romer (1986; 1992). Analizując modele ewolucyjne używane w ekonomii pod kątem ich elementów składowych, Safarzyńska i van der Bergh (2010) uznali różnorodność za jeden

z podstawowych komponentów takich modeli. Pojęcie różnorodności pojawia się często w literaturze ekonomicznej w kontekście innowacji (zob. np. Saviotti, Mani, 1995; Saviotti 2001; Saviotti, Pyka 2004; Kwaśnicki 2021), przy czym uznaje się, że stymulowanie wzrostu różnorodności poprzez innowacje powinno być celem prowadzonej polityki technologicznej (Metcalf 1994). Innowację z tworzeniem różnorodności utożsamili w swoich badaniach Safarzyńska i van den Bergh (2011). Pojęcie różnorodności jest obecne również w literaturze dotyczącej rozwoju regionalnego, gdzie odróżnia się tzw. *related* i *unrelated diversity* (Frenken et al. 2007), przy czym ta pierwsza dotyczy regionalnej koncentracji przedsiębiorstw, które wykazują podobieństwa między sobą (Asheim et al. 2011; Boschma 2014), a druga takich, które nie są wzajemnie powiązane (Neffke et al. 2011; Content et al. 2016). Większość badań pokazuje, że regionalne systemy gospodarcze muszą się różnicować, żeby się rozwijać (Content, Frenken 2016). Również w badaniach nad koewolucją systemów ekonomicznych różnorodność jest obecna, a jej zmiana postrzegana jako przyczyna lub też skutek zachodzących zmian (zob. np. Silverberg et al. 1988; Fatás-Villafranca et al. 2009; Almudi et al. 2020; Almudi, Fatás-Villafranca 2021).

Na podstawie studium literatury można stwierdzić, że różnorodność w modelach ekonomicznych rozumie się na trzech poziomach: pierwszy dotyczy zróżnicowania produktów, drugi – zróżnicowania przemysłu, a trzeci – zróżnicowania całego systemu gospodarczego. Zwiększające się zróżnicowanie produktów rozważał np. Malerba (1992) analizując dwa typy innowacji, będących przykładem stopniowych zmian technologicznych. Zmiany te mogą być poziome (horyzontalne), gdy celem firm jest modyfikacja cech produktu w celu dotarcia do nowego segmentu rynku lub nowej grupy klientów lub też pionowe (wertykalne), gdy polegają na poprawianiu jakości już wytwarzanych produktów. Z kolei badaniami nad zróżnicowaniem przemysłu zajmował się m.in. Tisdell (1999), który stwierdził, że zróżnicowanie organizacyjne oraz technologiczne firm pozytywnie wpływa na zdolność systemu gospodarczego do adaptacji w zmieniającym się środowisku ekonomicznym. Podobnie Dosi, Orsenigo i Silverberg (1988) zauważyli, że zróżnicowanie przedsiębiorstw, na które składają się asymetrie technologiczne, różnorodność technologiczna i behawioralna, jest podstawową i trwałą cechą środowisk przemysłowych podlegających zmianom technologicznym. Zróżnicowanie całego systemu gospodarczego bada się często w makroekonomicznych modelach wzrostu gospodarczego. Zróżnicowanie to określa się zazwyczaj jako „liczbę podmiotów, działań i obiektów (towarów i usług) niezbędnych do scharakteryzowania systemu gospodarczego” (zob. np. Saviotti, Mani, 1995; Saviotti 2001;

Saviotti, Pyka 2004; Saviotti, Pyka 2009; Saviotti et al. 2020). Tak rozumiane zróżnicowanie systemu ekonomicznego ma wpływ na zachodzącą w systemie gospodarczym zmianę jakościową i okazuje się stanowić warunek konieczny długookresowego wzrostu gospodarczego (zob. np. Saviotti 2001; Pyka et al. 2018; Saviotti et al. 2020).

W modelu prezentowanym w pracy (Saviotti, Pyka 2004) sektor produkcji stanowiła określona populacja firm, które konkurowały ze sobą w produkcji podobnego, ale nie identycznego dobra (tzw. *inter-sector competition*). Każde dobro było reprezentowane poprzez swoje właściwości technologiczne oraz użytkowe. Firmy w danym sektorze angażowały się w aktywność badawczą, która pozwalała na podniesienie jakości wytwarzanego dobra lub zwiększenie wydajności procesu produkcji. Rozwój ekonomiczny w modelu rozpoczynał się od ustalonej liczby sektorów, które produkowały znane konsumentom dobra. Każdy nowy sektor był tworzony przez schumpeterowskiego przedsiębiorcę wprowadzającego radykalną innowację, której skutkiem było powstanie nowego rynku. W modelu tym, innowacja tworzyła tzw. lukę dostosowawczą (*adjustment gap*), która była wyznaczona przez rozmiar populacji możliwych konsumentów wytworzonego nowego produktu. Poprzez różnicowanie się i produkowanie nowych dóbr, firmy konkurowały pomiędzy sektorami (*intra-sector competition*). Taka konkurencja (za Metcalfe, Gibbons 1991) nazwana została konkurencją schumpeterowską. Mierząc różnorodność systemu gospodarczego wyłącznie liczbą dających się wyodrębnić sektorów i nie biorąc pod uwagę wewnętrznego zróżnicowania każdego sektora, Pyka i Saviotti (2004) otrzymali następujące wnioski z przeprowadzonej symulacji: dla długoterminowej kontynuacji rozwoju gospodarczego niezbędny jest wzrost różnorodności (liczby sektorów), z kolei wzrost produktywności w istniejących sektorach tworzy zasoby wymagane do działań badawczych, a tym samym do powstawania nowych sektorów. W konsekwencji stwierdzili oni, że wzrost różnorodności prowadzący do rozwoju nowych sektorów oraz wzrost produktywności w istniejących sektorach są komplementarnymi składowymi procesami rozwoju gospodarczego.

Saviotti (2001) zwrócił uwagę na rolę konsumentów jako uczestników procesu rozwoju gospodarczego (por. Ciałowicz 2015). Zauważył przy tym, że wprowadzenie radykalnej innowacji nie może być stymulowane już istniejącym popytem, ani preferencjami konsumentów, które dotyczą towarów już produkowanych. W ten sposób poddał krytyce pojęcie relacji preferencji, jako nie znajdujące zastosowania przy analizowaniu rozwoju gospodarczego związanego z wprowadzaniem radykalnych innowacji. Zamiast preferencji Saviotti (2001) uznał za

zasadne w tym wypadku zastosowanie wyłożonej przez Karola Mengera w książce „Principles of economics” (1871) hierarchicznej teorii potrzeb. Według Mengera (1871) każdy konsument wartościuje dobra na podstawie własnej subiektywnej oceny. Dobra same w sobie nie mają wartości, a waga (wartość, znaczenie) jest nadawana danemu dobru przez konsumenta, gdy ten uświadomi sobie, że to dobro może zaspokoić jego konkretną potrzebę. Jednostka szereguje potrzeby względem ich wag: im ważniejsza potrzeba, tym wyższą wagę przypisuje dobrom, które mogą ją zaspokoić, przez co dobra służące zaspokojeniu potrzeb niezbędnych do życia mają najwyższą wartość, a te, które służą zaspokojeniu potrzeb mniej ważnych – wartość względnie niższą. Przy czym, choć każdy konsument ma takie same podstawowe potrzeby, konsumenci mogą się różnić w potrzebach bardziej wysublimowanych. Saviotti (2001) zauważył, że teorię Mengera można przełożyć na podejście ilościowe analizując dochód krytyczny (*critical income*), który zdefiniował Bonus (1973), a którym jest minimalny poziom dochodu, jaki konsument musiałby uzyskać, aby kupić dane dobro.

Podobnie Lancaster (1966b; 1982; 1990) poddał krytyce powszechnie używane w ekonomii podejście do wyboru konsumenta poprzez preferencje. W pracy „A new approach to consumer theory” (Lancaster 1966b) zaproponował on spojrzenie na dobra konsumpcyjne poprzez posiadane przez nie, mierzalne właściwości (*characteristics*), które stanowią niewielki podzbiór wszystkich fizycznych cech rozważanych dóbr. Lancaster przyjął, że każde dobro posiada pewien zbiór właściwości, a dobra różnią się między sobą składem ilościowym posiadanych właściwości, czyli swoją specyfikacją. Założył, że każdy konsument ma swoją „idealną” specyfikację danego dobra. Jeśli ta idealna specyfikacja nie jest możliwa do osiągnięcia, to konsument wybiera zastępcze dobro z inną specyfikacją, spośród dóbr o tych samych właściwościach, kierując się tzw. funkcją kompensacji, opartą na różnicy między dobrem idealnym a zastępczo konsumowanym. W pracy „Innovative entry: profit hidden beneath the Zero”, Lancaster (1982) opisał przypadek zignorowanej właściwości (*the ignored characteristic case*). Przypadek ten może mieć miejsce, gdy firmy które przyjmują do wiadomości istnienie  $k$  właściwości towarów, ignorują istnienie  $k + 1$  istotnej ich właściwości. Lancaster udowadnia, że możliwa jest wówczas taka restrukturyzacja rynku, po której zysk wszystkich firm obecnych na rynku wzrasta, co więcej zysk rośnie również, gdy liczba firm na rynku się zwiększa (*ibid.*).

Maławski i Woerter (2006) w formalnym modelu rozwoju gospodarczego wywołwanego innowacjami wprowadzili pojęcie różnorodności zmiany ewolucyjnej. Wyróżnili trzy ro-

dzaje różnorodności technologicznej odpowiadające trzem rodzajom zmian zachodzących w przestrzeni systemów produkcji gospodarki: różnorodność kumulatywną, innowacyjną oraz różnorodność odniesioną do twórczej destrukcji. Użyli przy tym (wspomnianej wyżej) koncepcji Stirlinga (1998, 2007), określając różnorodność jako odwzorowanie, które danej zmianie (innowacyjnej, kumulatywnej bądź będącej wynikiem twórczej destrukcji) w systemie produkcji przypisuje trzy liczby nieujemne odpowiadające wartości wielości, zrównoważenia i zróżnicowania dla tej zmiany. By uzyskać możliwość porównywania wartości różnorodności zmian, Malawski i Woerter (2006) przyjęli założenie o hierarchicznej strukturze różnorodności, traktując wielość jako dominującą składową, a zróżnicowanie jako najmniej istotną. Dzięki temu mogli stwierdzić, między innymi, że rosnąca różnorodność jest warunkiem koniecznym dla zmiany innowacyjnej, a różnorodność zmian innowacyjnych oraz dotyczących twórczej destrukcji jest nierozróżnialna. Malawski i Pliś (2007) zauważyli, że funkcji różnorodności zbioru Nehringa i Puppego (2002) można użyć w modelu analizowanym przez Malawskiego i Woertera (2006).

## 1.4. Podsumowanie

Niniejszy rozdział stanowi przegląd literatury na temat pojęcia różnorodności w naukach ekonomicznych. Przedstawiono w nim genezę tego pojęcia, która łączy się z początkami badań nad ekonomiczną działalnością człowieka.

Definiowanie różnorodności systemu ekonomicznego wymaga odwołania się do matematycznej definicji różnorodności zbioru. W tym rozdziale wprowadzono podział definicji różnorodności zbioru na takie, które dotyczą różnorodności rozumianej ontologicznie oraz te, w których różnorodność jest rozumiana jako heterogeniczność elementów zbioru. Uwagę w tym rozdziale skupiono na różnorodności w sensie ontologicznym, która jest obiektem zainteresowania badań prowadzonych w ramach niniejszej rozprawy.

Szczególne miejsce zajmuje pojęcie różnorodności w badaniach poświęconych ewolucji ekonomicznej. Stąd w tym rozdziale przedstawiono główne przesłanki teorii rozwoju gospodarczego, wywodzącej się z myśli J. A. Schumpetera. Omówiono także różne koncepcje różnorodności w szeroko rozumianym obszarze badań ekonomii ewolucyjnej. Wskazując na stronę podażową rynku jako na obszar generowania innowacji oraz stronę popytową rynku, która wprowadzane innowacje poddaje wartościowaniu, zwrócono uwagę na konieczność uwzględnienia

udziału obu stron rynku przy określaniu różnorodności systemu gospodarczego.

## Rozdział 2

# Różnorodność systemu ekonomicznego ze skończoną liczbą producentów i konsumentów

Poprzedni rozdział zawierał przegląd podejść do problemu definiowania różnorodności, która choć obecna w badaniach ekonomicznych w rozmaitych kontekstach, często rozumiana jest wyłącznie intuicyjnie i nieformalnie. Celem niniejszego rozdziału jest zdefiniowanie różnorodności systemu ekonomicznego w sposób ścisły i wprowadzenie jej do modelu systemu gospodarczego.

Przedstawiony w tym rozdziale model systemu gospodarczego, zawiera opis podmiotów gospodarczych charakterystyczny dla modelu Arrowa-Debreu (1954). Wpisuje się on równocześnie w ewolucyjne podejście do analizy ekonomicznej, które cechowało prace Andrzeja Malawskiego (zob. np. Malawski 1999). Obecnie modele tego rodzaju są używane np. do definiowania mechanizmów ekonomicznych (zob. np. Lipieta, Malawski 2016; 2021). Zmiany ewolucyjne w proponowanym modelu definiuje się zgodnie z teorią rozwoju gospodarczego Josepha A. Schumpetera (1912; 1934), tzn. przyjmuje się, że ewolucja gospodarki jest wywołana przez producentów-innowatorów, którzy decydują się na wprowadzenie oryginalnych rozwiązań technologicznych, będących skutkiem ich działalności naukowo-badawczej.

Do zdefiniowania różnorodności systemu ekonomicznego, które jest pierwszym z celów badań prowadzonych w ramach niniejszej rozprawy, zostanie w tym rozdziale użyte wielo-trybutowe ujęcie różnorodności zbioru zaproponowane przez Klausa Nehrunga oraz Clemensa Puppe (2002). To podejście, używane w różnych kontekstach (zob. np. Nehring, Puppe 2002; 2004a; 2004b; 2009), a wpisujące się w teorię produktu zainicjowaną przez Kevina J. Lanca-

stera (1966a; 1966b; 1977), wymaga określenia atrybutów posiadanych przez elementy zbioru. Stąd obiekty ekonomiczne, takie jak koszyki towarów czy plany produkcji będą w prezentowanym modelu opisywane poprzez posiadane przez nie atrybuty.

Wieloatrybutowe ujęcie różnorodności (Nehring, Puppe 2002) przedstawiono w Rozdziale 2.1, przy czym podane w nim przykłady pochodzą od autora rozprawy. Rozdział 2.2 zawiera model systemu gospodarczego oraz opis jego ewolucji zaczerpnięty, przy drobnych zmianach w oznaczeniach, z pracy (Lipietka 2018). Pozostałe wyniki tego rozdziału, a więc pochodzą od autora i zostały częściowo przedstawione wcześniej w pracy „Diversity and innovation in economic evolution” (Pliś 2020). Najważniejsze zmiany, jakie zostały wprowadzone w niniejszym rozdziale w stosunku do pracy (Pliś 2020) polegają na doprecyzowaniu definicji funkcji różnorodności określonej w przestrzeni towarów i zostały wprowadzone w Rozdziale 2.3.

## 2.1. Różnorodność skończonego zbioru obiektów w ujęciu wieloatrybutowym

### 2.1.1. Podstawowe pojęcia

Centralne miejsce w teorii różnorodności zaprezentowanej w pracy (Nehring, Puppe 2002) zajmuje pojęcie atrybutu (Nehring, Puppe 2002). O ile w języku potocznym atrybut oznacza zazwyczaj cechę lub własność pewnego obiektu, to w zaproponowanym przez Nehringa i Puppego (2002) podejściu, **atrybut** jest rozumiany jako *zbiór* elementów, które posiadają określoną cechę lub własność.

Niech  $X$  będzie niepustym zbiorem skończonym. Jeśli atrybut  $A$  charakteryzuje niektóre elementy zbioru  $X$ , to można rozważać zbiór:

$$\{x \in X : x \text{ posiada atrybut } A\}. \quad (2.1)$$

W rozprawie, podobnie jak w pracy (Nehring, Puppe 2002), atrybut  $A$  utożsamia się ze zbiorem określonym formułą (2.1). Formalnie zatem  $A \subset X$ . Stąd fakt, że element  $x \in X$  **posiada atrybut**  $A$  zapisuje się jako  $x \in A$ . Sformułowanie **atrybut**  $A$  **jest realizowany w zbiorze**  $D$  oznacza, że w zbiorze  $D$  występuje element, który posiada atrybut  $A$ , czyli zachodzi:  $A \cap D \neq \emptyset$



(Nehring, Puppe 2002). Atrybutów w skończonym zbiorze  $X$  może być co najwyżej  $2^{\#X} - 1$ , czyli tyle, ile jest jego niepustych podzbiorów.

**Przykład 2.1** *Niech  $X$  będzie (niepustym) zbiorem odzieży dostępnej w pewnym centrum handlowym. Atrybutem w zbiorze  $X$  może być np. zbiór odzieży ustalonego koloru, ustalonego rozmiaru, ustalonej marki itp. Jeśli asortyment pewnego sklepu, mieszczącego się w rozważanym centrum handlowym, składa się wyłącznie z rozmaitych białych koszul, koszul koloru niebieskiego oraz niebieskich spodni, to asortyment tego sklepu reprezentuje zbiór*

$$R = \{\text{białe koszule, niebieskie koszule, niebieskie spodnie}\} \subset X.$$

*Atrybuty realizowane w zbiorze  $R$  to na przykład:  $A_1 = \{x \in X : x \text{ ma kolor niebieski}\}$ ,  $A_2 = \{x \in X : x \text{ jest koszulą}\}$ ,  $A_3 = \{x \in X : x \text{ ma kolor biały}\}$  itp. Z kolei  $A_4 = \{x \in X : x \text{ stanowi nakrycie głowy}\}$  nie jest realizowany w zbiorze  $R$ , podobnie atrybut  $A_5 = \{x \in X : x \text{ ma kolor czerwony}\}$ .*

Przyjmuje się, że każdy atrybut  $A \subset X$  ma określoną wagę  $\lambda_A$ , która jest liczbą nieujemną niosącą informację o istotności atrybutu  $A$ .

**Definicja 2.1 (Nehring, Puppe 2002)** *Funkcję  $\lambda: 2^X \ni A \mapsto \lambda_A \in [0, +\infty)$ , która przypisuje każdemu atrybutowi  $A$  jego wagę  $\lambda_A$  nazywa się **funkcją ważącą atrybuty** w zbiorze  $X$ .*

**Istotnym atrybutem** nazywa się taki atrybut  $A \subset X$ , którego waga jest dodatnia, tzn.  $\lambda_A > 0$ .

**Rodzinę istotnych atrybutów** w zbiorze  $X$  oznacza się przez

$$\Lambda := \{A \subset X : \lambda_A > 0\}. \quad (2.2)$$

Niech  $\lambda: 2^X \ni A \mapsto \lambda_A \in [0, +\infty)$  będzie funkcją ważącą atrybuty w zbiorze  $X$ .

**Definicja 2.2 (Nehring, Puppe 2002)** *Funkcję  $v: 2^X \rightarrow [0, +\infty)$  nazywa się **funkcją różnorodności** dla zbioru  $X$ , jeśli dla każdego niepustego zbioru  $D \subset X$  zachodzi równość*

$$v(D) = \sum_{A \subset X: A \cap D \neq \emptyset} \lambda_A, \quad (2.3)$$

przy czym dla zbioru pustego przyjmuje się, że  $v(\emptyset) := 0$ .

Z faktu, że zbiór  $X$  jest skończony wynika, że suma występująca we wzorze (2.3) jest również skończona.

**Uwaga 2.1** *Funkcja różnorodności  $v: 2^X \rightarrow [0, +\infty)$  każdemu podzbiorowi  $D \subset X$  przyporządkowuje łączną wagę atrybutów realizowanych w zbiorze  $D$  wynoszącą  $v(D)$ , którą nazywa się **różnorodnością zbioru  $D$** .*

Wybrane własności funkcji różnorodności określonej Definicją 2.2 zostaną omówione w Rozdziale 2.1.2.

**Przykład 2.2** *Niech do centrum handlowego opisanego w Przykładzie 2.1 trafi osoba, dla której istotne są tylko atrybuty  $A_1$  oraz  $A_2$  z Przykładu 2.1, przy czym atrybut  $A_1$  ma dwukrotnie większe znaczenie niż  $A_2$ . Można przyjąć, że osoba odwiedzająca sklep poszukuje koszuli i istotny jest dla niej niebieski kolor wybieranego ubrania. Wtedy rodzinę istotnych atrybutów stanowi zbiór  $\Lambda = \{A_1, A_2\}$ , a wagi atrybutów można określić następująco:  $\lambda_{A_1} = a$ ,  $\lambda_{A_2} = 2a$  przy czym  $a > 0$  oraz  $\lambda_A = 0$  dla każdego  $A \subset X$  takiego, że  $A \in 2^X \setminus \{A_1, A_2\}$ . Funkcja ważąca atrybuty  $\lambda: 2^X \rightarrow [0, +\infty)_+$  wyznacza funkcję różnorodności  $v: 2^X \ni D \mapsto v(D) \in [0, +\infty)$ , której wartość  $v(R)$  określa różnorodność opisanego w Przykładzie 2.1 zbioru  $R$  (zob. Uwaga 2.1) następująco:  $v(R) = \lambda_{A_2} + \lambda_{A_1} = 3a$ .*

## 2.1.2. Własności funkcji różnorodności zbioru skończonego

Poniżej przedstawiono wybrane własności funkcji różnorodności określonej Definicją 2.2 zaczerpnięte z pracy (Nehring, Puppe 2002), które są używane w dalszej części rozprawy. Niech  $X$  będzie skończonym zbiorem niepustym.

**Spostrzeżenie 2.1 (Nehring, Puppe 2002)** *Funkcja różnorodności  $v: 2^X \rightarrow [0, +\infty)$  jest monotoniczna, tzn. dla dowolnych  $D, T \subset X$  zachodzi implikacja: jeśli  $D \subset T$ , to  $v(D) \leq v(T)$ .*

Własność monotoniczności oznacza, że różnorodność zbioru (zob. Uwaga 2.1) nie maleje po dołączeniu do niego kolejnego obiektu.

**Spostrzeżenie 2.2 (Nehring, Puppe 2002)** *Jeżeli  $v: 2^X \rightarrow [0, +\infty)$  jest funkcją różnorodności, to dla dowolnych  $D, T \subset X$  takich, że  $D \subset T$  oraz dla dowolnego  $x \in X$  zachodzi nierówność:*

$$v(D \cup \{x\}) - v(D) \geq v(T \cup \{x\}) - v(T). \quad (2.4)$$

Funkcję  $v: 2^X \rightarrow [0, +\infty)$ , która spełnia warunek (2.4) nazywa się funkcją *submodularną* (Nehring, Puppe 2002). Własność submodularności funkcji różnorodności oznacza, że wraz ze wzrostem liczby elementów zbioru przyrost różnorodności związany z dołączeniem do zbioru kolejnego elementu się nie zwiększa. Z powyższych spostrzeżeń można wyciągnąć następujący wniosek.

**Wniosek 2.1** *Jeśli  $v: 2^X \rightarrow [0, +\infty)$  jest funkcją różnorodności, to dla dowolnych  $D, T \subset X$  zachodzi nierówność:*

$$v(D) + v(T) \geq v(D \cup T) - v(D \cap T). \quad (2.5)$$

**Definicja 2.3 (Nehring, Puppe 2002)** *Różnorodnością krańcową zbioru  $D \subset X$  dla ustalonego  $x \in X$  (distinctveness of  $x$  from the set  $D$ ) nazywa się liczbę*

$$d(x, D) := v(D \cup \{x\}) - v(D) = \sum_{A: x \in A, A \subset X \setminus D} \lambda_A. \quad (2.6)$$

Różnorodność krańcowa zbioru jest wyznaczona przez przyrost wartości funkcji różnorodności wynikający z dołączenia do tego zbioru ustalonego elementu  $x \in X$  (por. wzór (1.2)). Spostrzeżenie 2.2 gwarantuje, że dla każdego  $x \in X$  funkcja:  $2^X \ni D \mapsto d(x, D) \in [0, +\infty)$ , która każdemu podzbiorowi  $D \subset X$  przypisuje jego różnorodność krańcową daną wzorem (2.6) jest nierosnąca.

**Definicja 2.4 (Nehring, Puppe 2002)** *Dla dowolnych  $x, y \in X$  liczbę*

$$d(x, y) := d(x, \{y\}) = v(\{x, y\}) - v(\{y\}) = \sum_{A: x \in A, y \notin A} \lambda_A \quad (2.7)$$

*nazywa się różnicą między  $x$  a  $y$  (dissimilarity of  $x$  from  $y$ ).*

Różnica między  $x$  a  $y$  jest równa łącznej wadze wszystkich tych atrybutów posiadanych przez  $x$ , których nie posiada  $y$ . W ogólnym przypadku  $d(x, y) \neq d(y, x)$ .

**Spostrzeżenie 2.3** *Jeśli funkcja  $d: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$  jest określona wzorem (2.7), to dla każdego  $x, y, z \in X$ :*

(i)  $d(x, x) = 0$ , tzn. różnica między danym elementem a nim samym wynosi zero;

(ii)  $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ , tzn. funkcja  $d$  spełnia warunek trójkąta;

(iii)  $d(x, y) = d(y, x)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $v(\{x\}) = v(\{y\})$ , tzn. funkcja  $d$  jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy różnorodność wszystkich zbiorów jednoelementowych jest taka sama.

*Dowód.* Własności (i) oraz (iii) wynikają wprost z Definicji 2.4. Niech  $A' := X \setminus A$ . Warunek trójkąta dla funkcji  $d: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$  można pokazać następująco:

$$\begin{aligned} \{A : x \in A \wedge z \in A'\} &= \{A : x \in A \wedge z \in A' \wedge (y \in A \vee y \in A')\} = \\ &= \{A : (x \in A \wedge z \in A' \wedge y \in A) \vee (x \in A \wedge z \in A' \wedge y \in A')\} = \\ &= \{A : (x \in A \wedge z \in A' \wedge y \in A)\} \cup \{A : (x \in A \wedge z \in A' \wedge y \in A')\} \subset \\ &\subset \{A : z \in A' \wedge y \in A\} \cup \{A : x \in A \wedge y \in A'\}. \end{aligned}$$

Zatem

$$\sum_{A: x \in A \wedge z \in A'} \lambda_A \leq \sum_{A: x \in A \wedge y \in A'} \lambda_A + \sum_{A: y \in A \wedge z \in A'} \lambda_A,$$

czyli

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

■

Funkcja różnorodności określona Definicją 2.2 jest jednoznacznie wyznaczona przez postać funkcji ważącej atrybuty (zob. Definicja 2.1). Oznacza to, że wyróżnienie rodziny istotnych atrybutów i przypisanie im wag jednoznacznie definiuje różnorodność dowolnego podzbioru zbioru skończonego. Z drugiej strony można pokazać, że również funkcja różnorodności, określona na rodzinie podzbiorów zbioru skończonego, jednoznacznie wyznacza postać funkcji ważącej atrybuty. Mówi o tym poniższe twierdzenie.

**Twierdzenie 2.1 (Nehring, Puppe 2002)** *Dla dowolnej funkcji  $v: 2^X \rightarrow [0, +\infty)$  takiej, że  $v(\emptyset) = 0$  istnieje dokładnie jedna funkcja ważąca atrybuty  $\lambda: 2^X \rightarrow [0, +\infty)$  taka, że  $\lambda_\emptyset = 0$  oraz dla każdego  $D \subset X$  wartość  $v(D)$  jest dana wzorem (2.3). Ponadto dla dowolnego  $A \neq \emptyset$  zachodzi równość:*

$$\lambda_A = \sum_{D \subset A} (-1)^{\#(A \setminus D)+1} \cdot v(X \setminus D).$$

Struktura rodziny istotnych atrybutów  $\Lambda \subset 2^X$  decyduje o postaci funkcji różnorodności dla zbioru skończonego  $X$ . W niektórych przypadkach, określenie funkcji różnorodności

dla zbioru skończonego, może sprowadzić się do wyznaczenia różnic danych wzorem (2.7), między poszczególnymi elementami tego zbioru.

### 2.1.3. Modele różnorodności skończonego zbioru obiektów

Niech  $X$  będzie niepustym zbiorem skończonym. Każdą niepustą rodzinę atrybutów  $\mathcal{A} \subset 2^X$  nazywa się *modelem różnorodności* (Nehring, Puppe 2002). O funkcji różnorodności  $v: 2^X \rightarrow [0, +\infty)$  mówi się, że jest *zgodna z modelem*  $\mathcal{A}$ , jeśli  $\Lambda \subset \mathcal{A}$ . Warunek ten oznacza, że tylko atrybut wchodzący w skład rodziny  $\mathcal{A}$  może mieć niezerową wagę. Poniżej zaprezentowano trzy podstawowe modele różnorodności zbioru skończonego (zob. Nehring, Puppe 2002).

#### I. Model hierarchiczny

Rodzina atrybutów  $\mathcal{A} \subset 2^X$  zadaje *hierarchiczny model różnorodności*, jeśli dla dowolnych atrybutów:  $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$  zachodzi warunek (Nehring, Puppe 2002):

$$\text{jeśli } A_1 \cap A_2 \neq \emptyset, \text{ to } [A_1 \subset A_2 \text{ lub } A_2 \subset A_1]. \quad (2.8)$$

Powyższa własność oznacza, że dla funkcji różnorodności  $v: 2^X \rightarrow [0, +\infty)$  zgodnej z modelem hierarchicznym dla dowolnych  $x \in X$  i  $D \subset X$  zachodzi równość (Nehring, Puppe 2002):

$$d(x, D) = \min_{y \in D} d(x, y), \quad (2.9)$$

gdzie  $d(x, y)$  jest różnicą między  $x$  a  $y$  daną wzorem (2.7).

#### II. Model liniowy

Niech w zbiorze skończonym  $X = \{x_1, \dots, x_k\}$  będzie określona relacja liniowego porządku  $\preceq$ , tzn. relacja przechodnia, antysymetryczna i spójna w  $X$ . Rodzina atrybutów  $\mathcal{A} \subset 2^X$  określa *liniowy model różnorodności*, jeśli każdy atrybut  $A \in \mathcal{A}$  jest *przedziałem* w  $X$ , tzn. jest postaci  $A = \{x \in X : x_i \preceq x \preceq x_j\}$ , dla  $x_i, x_j \in X$ , gdzie  $i \leq j$ . Przykładem niech będzie relacja „starszeństwa”:  $x \preceq y$ , gdy  $y$  ma lat co najmniej tyle ile  $x$ . Wówczas przedziałami są zbiory typu:  $\{x \in X : x \text{ ma nie mniej niż } a \text{ lat}\}$  lub  $\{x \in X : x \text{ ma więcej lat niż } a, \text{ ale nie mniej niż } b \text{ lat}\}$ , gdzie  $a, b \in \mathbb{N}$ .

Jeśli  $v: 2^X \rightarrow [0, +\infty)$  jest funkcją różnorodności zgodną z modelem liniowym, to dla dowolnego zbioru  $D = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_j\} \subset X$ , gdzie  $\bar{x}_1 \preceq \dots \preceq \bar{x}_j$ ,  $j \leq k$  zachodzi równość

(zob. Nehring, Puppe 2002):

$$v(\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_j\}) = v(\{\bar{x}_j\}) + \sum_{i=1}^j d(\bar{x}_i, \bar{x}_{i-1}). \quad (2.10)$$

Zarówno liniowy jak i hierarchiczny model różnorodności stanowią przykłady takich modeli, w których funkcja różnorodności jest jednoznacznie wyznaczona przez jej wartości na podzbiorach co najwyżej dwuelementowych zbioru skończonego (Nehring, Puppe 2002). Oznacza to, że w tych modelach do wyznaczenia różnorodności dowolnego podzbioru zbioru  $X$ , wymagana jest jedynie znajomość wartości różnorodności każdego zbioru jednoelementowego oraz wartość różnicy  $d(x, y)$  określonej wzorem (2.7) między dowolnymi dwoma elementami  $x, y \in X$ .

### III. Model drzewa

Niech dany będzie skończony zbiór  $X$ . Dowolny podzbiór dwuelementowy  $\{x, y\} \subset X$  nazywa się krawędzią. Grafem nazywa się parę  $(X, \mu)$ , gdzie  $\mu$  stanowi podzbiór zbioru krawędzi. Elementy zbioru  $X$  nazywa się wierzchołkami. *Drzewem* nazywa się taki graf, którego każde dwa wierzchołki łączy dokładnie jedna droga (rozumiana jako ciąg sąsiadujących ze sobą, połączonych krawędziami wierzchołków, z których żaden się nie powtarza) (zob. np. Chartrand, Zhang 2012). Rodzina atrybutów  $\mathcal{A}$  zadaje *model różnorodności w postaci drzewa*, jeśli każdy atrybut  $A \in \mathcal{A}$  ma postać drzewa (Nehring, Puppe 2002).

Funkcja różnorodności  $v: 2^X \rightarrow [0, +\infty)$  zgodna z modelem drzewa nie musi być jednoznacznie wyznaczona poprzez wartości, jakie przyjmuje na zbiorach jedno i dwuelementowych. Wskazuje na to poniższy przykład.

**Przykład 2.3** Niech parę  $(X, \mu)$ , gdzie  $X = \{x, y_1, y_2, y_3\}$  oraz  $\mu = \{\{x, y_i\}, i = 1, 2, 3\}$  będzie drzewem. Niech dane będą następujące wartości atrybutów:  $\lambda_{\{x\}} := 1$ ,  $\lambda_X := 2$  oraz  $\lambda_{A_{ij}} := 1$ , gdy  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $i \neq j$ . Niech  $v$  oraz  $\bar{v}$  będą dwiema funkcjami różnorodności zgodnymi z modelem w postaci drzewa, przy czym:

- rodzinę istotnych atrybutów funkcji  $v: 2^X \rightarrow [0, +\infty)$  stanowi  $\Lambda := \{\{x\}, X\}$ ; wówczas:

$$v(\{x\}) = \lambda_{\{x\}} + \lambda_X = 3,$$

$$v(\{y_i\}) = \lambda_X = 2 \text{ dla } i = 1, 2, 3,$$

$$v(\{x, y_i\}) = v(\{y_i, y_j\}) = \lambda_{\{x\}} + \lambda_X = 3 \text{ dla } i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j.$$

- dla  $\bar{v}: 2^X \rightarrow [0, +\infty)$  rodziną istotnych atrybutów jest

$$\bar{\Lambda} := \{A_{12} = \{y_1, x, y_2\}, A_{13} = \{y_1, x, y_3\}, A_{23} = \{y_2, x, y_3\}\}.$$

Wtedy:

$$\bar{v}(\{x\}) = \bar{\lambda}_{A_{12}} + \bar{\lambda}_{A_{13}} + \bar{\lambda}_{A_{23}} = 3,$$

$$\bar{v}(\{y_i\}) = \sum_{y_i \in A_{ij}} \bar{\lambda}_{A_{ij}} = 2 \text{ dla } i = 1, 2, 3, \quad i \neq j,$$

$$\bar{v}(\{x, y_i\}) = \bar{\lambda}_{A_{12}} + \bar{\lambda}_{A_{13}} + \bar{\lambda}_{A_{23}} = 3,$$

$$\bar{v}(\{y_i, y_j\}) = \sum_{A_{ij} \cap \{y_i, y_j\} \neq \emptyset} \bar{\lambda}_{A_{ij}} = 3 \text{ dla } i, j = 1, 2, 3, \text{ gdzie } i \neq j.$$

Zatem wartości funkcji  $v$  oraz  $\bar{v}$  są równe dla zbiorów składających się z co najwyżej dwóch elementów. Jednak dla zbioru  $D = \{y_1, y_2, y_3\} \subset X$

$$v(D) = \lambda_X = 2 \quad \text{oraz} \quad \bar{v}(D) = \bar{\lambda}_{A_{12}} + \bar{\lambda}_{A_{13}} + \bar{\lambda}_{A_{23}} = 3,$$

więc wartości funkcji  $v$  oraz  $\bar{v}$  są różne.

Funkcja różnorodności jest jednoznacznie określona poprzez zadanie jej wartości na zbiorach co najwyżej dwuelementowych w przypadku tzw. *jednowymiarowych* modeli różnorodności (zob. Nehring, Puppe 2002). Do takich modeli zalicza się zarówno hierarchiczny jak i liniowy model różnorodności, a także szczególny przypadek modelu różnorodności w postaci *drzewa filogenetycznego*, który rozważał Weitzman (1992; 1998) (por. część 1.2.1).

## 2.2. System ekonomiczny ze skończoną liczbą podmiotów

Zaprezentowane w podrozdziale 2.1 podejście do różnorodności zbioru skończonego można po odpowiedniej modyfikacji zastosować w modelu gospodarki, w którym podmioty ekonomiczne, tzn. producenci i konsumenci, operują w przestrzeni towarów, opisaną jako skończone wymiarowa przestrzeń euklidesowa (por. Arrow, Debreu 1954). W przestrzeni tej definiuje

się zbiory konsumpcji, składające się z koszyków towarów, które chcieliby realizować poszczególni konsumenci oraz zbiory produkcji, które definiują możliwości wytwórcze firm. Procesy produkcji i konsumpcji utożsamia się z wektorami typu „wejście-wyjście” (por. Arrow, Debreu 1954). Jednak przestrzeń euklidesowa składa się z nieprzeliczalnej ilości obiektów (choć zbiory produkcji i konsumpcji mogą być skończone), a definicja funkcji różnorodności, podana przez Nehringa i Puppego (2002), została określona dla zbioru skończonego. Odpowiednie dostosowanie rodziny istotnych atrybutów pozwala jednak na użycie funkcji różnorodności Nehringa i Puppego (2002) w rozpatrywanym modelu gospodarki.

### 2.2.1. Definicja systemu ekonomicznego ze skończoną liczbą podmiotów

W rozprawie przyjmuje się, że miejscem działania skończonej liczby podmiotów jest *przestrzeń towarów* określona jako skończenie wymiarowa przestrzeń euklidesowa

$$\mathbf{R}^l = \{(x_1, x_2, \dots) : x_k \in \mathbb{R}, \forall_{k>l} x_k = 0\}. \quad (2.11)$$

Każdy towar jest rozumiany jako dobro lub usługa w pełni określona przez zespół swoich cech fizycznych oraz miejsce i czas swojej dostępności. Każdy towar może być rozpatrywany zarówno z perspektywy producenta jak i konsumenta, a jego ilość jest reprezentowana przez dowolną liczbę rzeczywistą (por. Małowski 1999).

Ceny towarów wyraża wektor  $p \in \mathbf{R}^l$ , przy czym, zgodnie z przyjętą konwencją (zob. Mas-Colell et al. 1995), ceny dóbr rzadkich wyrażone są poprzez liczby dodatnie, szkodliwych – za pomocą liczb ujemnych, a ceny dóbr wolnych są równe zero. Wartość obiektu przestrzeni towarów  $y \in \mathbf{R}^l$  można obliczyć używając standardowego iloczynu skalarnego:

$$p \cdot y = (p_1, p_2, \dots) \cdot (y_1, y_2, \dots) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k y_k. \quad (2.12)$$

Ze względu na sposób określenia przestrzeni towarów, cenowa wartość wektora  $y \in \mathbf{R}^l$ , określona wzorem (2.12), jest liczbą rzeczywistą.



## System produkcji ze skończoną liczbą producentów jako model strony podaźowej systemu gospodarczego

W tej części rozprawy przyjmuje się, że *zbiór producentów (firm)* działających w przestrzeni towarów  $\mathbf{R}^l$  jest zbiorem skończonym postaci  $B = \{b^1, \dots, b^n\}$ , gdzie  $n \in \mathbb{N}$ . Proces produkcji, który jest możliwy do przeprowadzenia przez producenta  $b \in B$ , ze względu na dostępne dla niego technologie, jest utożsamiony w modelu z wektorem typu *input-output*, zwanym *planem produkcji*. Plan produkcji  $y^b \in \mathbf{R}^l$  opisuje technologię, która jest używana w procesie produkcji przez firmę  $b$ , przy czym wejścia procesu wskazują ujemne współrzędne wektora  $y^b$ , a wyjścia – jego współrzędne dodatnie (por. Mas-Colell et al. 1995). Odwzorowanie

$$y : B \ni b \mapsto Y^b \subset \mathbf{R}^l, \quad (2.13)$$

przypisuje każdemu producentowi  $b \in B$  jego niepusty *zbiór produkcji*  $Y^b$ , który składa się z planów produkcji  $y^b \in \mathbf{R}^l$ . W rozprawie przyjmuje się, że zbiór produkcji każdego producenta jest zbiorem domkniętym.

**Uwaga 2.2** *Jeśli dla pewnego  $b \in B$  zbiór produkcji jest postaci  $Y^b = \{0\} \subset \mathbf{R}^l$ , to producenta  $b \in B$  nazywa się nieaktywnym.*

**Definicja 2.5** *Parę  $P = (B, y)$ , gdzie  $B$  jest skończonym zbiorem producentów, a  $y$  jest odwzorowaniem opisanym formułą (2.13), nazywa się **systemem produkcji ze skończoną liczbą producentów**.*

Zbiór planów produkcji, które są możliwe do zrealizowania w systemie produkcji  $P$  oznacza się przez

$$Y := \bigcup_{b \in B} Y^b. \quad (2.14)$$

W rozważanym modelu ceny dane są egzogenicznie, tzn. każdy producent traktuje wektor cen jako dany i wybiera plan produkcji możliwy do wykonania, określając swoje wejścia (używane materiały, przewidywane inwestycje) oraz wyjścia (wytwarzane produkty). Przy danym systemie cen  $p \in \mathbf{R}^l$  zysk z realizacji planu produkcji  $y^b \in Y^b$  jest określony przez iloczyn  $p \cdot y^b$ . Przy danym systemie cen definiuje się zbiór takich planów produkcji, które maksymalizują zysk

producenta  $b \in B$ . Zbiór ten ma postać:

$$\eta^b(p) := \{y^{*b} \in Y^b : p \cdot y^{*b} = \max_{y^b \in Y^b} p \cdot y^b\}.$$

Dla ustalonego systemu cen  $p \in \mathbf{R}^l$  zbiór  $\eta^b(p)$  może być pusty. Dzieje się tak na przykład, gdy przy  $p \in \mathbf{R}^l$  zysk z realizacji każdego planu produkcji  $y^b \in Y^b$  jest dodatni, a równocześnie dla każdego  $c \geq 1$  zachodzi  $c y^b \in Y^b$  (czyli zbiór  $Y^b$  spełnia własność niemalejących korzyści skali). Jeżeli  $p = (0, 0, \dots) = \mathbf{0} \in \mathbf{R}^l$ , to każdy wektor ze zbioru  $Y^b$  maksymalizuje zysk producenta  $b$ , tzn.  $\eta^b(\mathbf{0}) = Y^b$ .

W badanym modelu przyjmuje się, że znając wektor cen  $p$ , każdy aktywny producent  $b \in B$  realizuje pewien plan produkcji przy czym:

- jeśli  $\eta^b(p) \neq \emptyset$ , to:
  - producent może zdecydować się na realizację planu  $y^{*b} \in \eta^b(p)$ , dzięki czemu uzyska zysk maksymalny; taki sposób postępowania producenta nazywa się zachowaniem racjonalnym (por. Simon 1955);
  - producent może wybrać do realizacji plan  $y^b \in Y^b \setminus \eta^b(p)$ , który nie maksymalizuje jego zysku, a środki zaoszczędzone na nakładach produkcji przeznaczyć na działania, które umożliwią mu w przyszłości wprowadzenie innowacji (czyli np. na zakup nowych technologii, albo na badania nad stworzeniem takich technologii);
- jeśli  $\eta^b(p) = \emptyset$ , to producent wybiera plan  $y^b \in Y^b$  zgodnie ze swoim indywidualnym kryterium; wówczas także może część swojego zysku przeznaczyć na działania zmierzające do wprowadzenia innowacji w przyszłości.

### **System konsumpcji ze skończoną liczbą konsumentów jako model strony popytowej systemu gospodarczego**

W tej części rozprawy przyjmuje się, że *zbiór konsumentów* działających w przestrzeni towarów  $\mathbf{R}^l$  jest zbiorem skończonym postaci  $H = \{a^1, \dots, a^m\}$ , gdzie  $m \in \mathbb{N}$ . Każdy *konsument*  $a \in H$  scharakteryzowany jest przez swój *zbiór konsumpcji*  $X^a \subset \mathbf{R}_+^l = \{x \in \mathbf{R}^l : x_i \geq 0 \text{ dla } i = 1, \dots, l\}$  oraz zwrotną, przechodnią i spójną relację preferencji  $\preceq^a$  określoną w zbiorze  $X^a$ . Niech

przyporządkowanie

$$\xi: H \ni a \mapsto X^a \subset \mathbf{R}_+^l \quad (2.15)$$

przypisuje każdemu konsumentowi jego zbiór konsumpcji, odwzorowanie

$$\varepsilon: H \ni a \mapsto \preceq^a \subset X^a \times X^a \quad (2.16)$$

określa relację preferencji każdego konsumenta, a funkcja

$$\omega: H \ni a \mapsto \omega^a \in \mathbf{R}^l \quad (2.17)$$

przyporządkowuje każdemu konsumentowi jego wektor zasobu.

**Definicja 2.6** Czwórkę  $C = (H, \xi, \varepsilon, \omega)$ , gdzie  $H$  jest skończonym zbiorem konsumentów, a odwzorowania:  $\xi$ ,  $\varepsilon$  oraz  $\omega$  określone są wzorami: (2.15), (2.16) oraz (2.17), nazywa się **systemem konsumpcji ze skończoną liczbą konsumentów**.

W rozpatrywanym modelu przyjmuje się, że konsumenci są właścicielami firm (za Arrow, Debreu 1954). Udziały konsumentów w zyskach producentów określa odwzorowanie

$$\theta: H \times B \rightarrow [0, 1], \quad (2.18)$$

przy czym

$$\sum_{a \in H} \theta(a, b) = 1 \text{ dla każdego } b \in B$$

Liczba  $\theta(a, b)$  opisuje udział konsumenta  $a \in H$  w zysku producenta  $b \in B$ . Ze względu na to, że zbiory konsumentów i producentów nie muszą być rozłączne, producent  $b \in B$  może posiadać udziały w dowolnej firmie ze zbioru  $B$ . Dla każdego konsumenta  $a \in H$  przy danym systemie cen  $p \in \mathbf{R}^l$  określa się jego *zbiór budżetowy* zdefiniowany jako

$$\beta^a(p) := \{x^a \in X^a: p \cdot x^a \leq p \cdot \omega^a + p \cdot \sum_{b \in B} \theta(a, b) y^b\},$$

gdzie  $y^b \in Y^b$  jest planem produkcji zrealizowanym przez firmę  $b \in B$  przy systemie cen  $p$ . Dla każdego konsumenta  $a \in H$  przyjmuje się, że dla analizowanych wektorów cen  $p \in \mathbf{R}^l$ , zbiór budżetowy  $\beta^a(p)$  jest niepusty. Przy danym wektorze cen  $p$  konsument  $a \in H$  może zrealizować

dowolny plan konsumpcji  $x^a \in \beta^a(p)$ . Wybrany plan może maksymalizować preferencje konsumenta w zbiorze budżetowym lub też nie; w tym drugim przypadku konsument może środki niewykorzystane na konsumpcję przeznaczyć na inwestycję w firmie, w której ma udziały.

Wspólne funkcjonowanie sfery podaźowej i popytowej gospodarki, w której działa skończona liczba podmiotów ekonomicznych, określa działanie systemu ekonomicznego jako całości.

**Definicja 2.7 (Lipieta 2018)** *Ekonomią ze skończoną liczbą podmiotów nazywa się trójkę  $E = (P, C, \theta)$ , w której  $P = (B, y)$  jest systemem produkcji ze skończoną liczbą producentów,  $C = (H, \xi, \varepsilon, \omega)$  jest systemem konsumpcji ze skończoną liczbą konsumentów, a udziały konsumentów w zyskach producentów określa przyporządkowanie  $\theta$  dane wzorem (2.18).*

W systemie ekonomicznym  $E$ , przy danym wektorze cen  $p \in \mathbf{R}^l$ , każdy producent  $b \in B$  realizuje wybrany przez siebie plan produkcji  $y^b \in Y^b$ . Zyski z działalności producentów dzielą między siebie konsumenci (zgodnie z udziałami określonymi przez odwzorowanie  $\theta$ ). Każdy konsument  $a \in H$  realizuje wybrany przez siebie plan konsumpcji  $x^a \in \beta^a(p)$ . Stan systemu ekonomicznego ze skończoną liczbą podmiotów przy danym wektorze cen  $p \in \mathbf{R}^l$  można zatem opisać określając plany działania poszczególnych konsumentów i producentów. Utworzona w ten sposób macierz  $M_{l \times (m+n)}$ , której kolumny stanowią poszczególne wektory konsumpcji i produkcji:  $((x^a)_{a \in H}, (y^b)_{b \in B})$  nazywa się *alokacją*. Dla danej alokacji  $((x^a)_{a \in H}, (y^b)_{b \in B})$ , przy oznaczeniach  $\tilde{x} := \sum_{a \in H} x^a$  oraz  $\tilde{y} := \sum_{b \in B} y^b$ :

- *popytem netto* nazywa się wektor

$$\tilde{x} - \tilde{y} := \sum_{a \in H} x^a - \sum_{b \in B} y^b,$$

- *popyt nadwyżkowy* to wektor

$$\tilde{z} = \tilde{x} - \tilde{y} - \bar{\omega}, \quad (2.19)$$

gdzie  $\bar{\omega} = \sum_{a \in H} \omega^a$  jest *zasobem całkowitym* ekonomii. Wektor  $\tilde{z}$  opisuje nadwyżkę popytu netto nad zasobami całkowitymi ekonomii  $E$ .

Szczególny i często badany przypadek stanowi alokacja, w której wszystkie podmioty realizują swoje optymalne plany działania, a popyt nadwyżkowy jest równy zero.

**Definicja 2.8** *Stanem równowagi (w sensie Walrasa) ekonomii ze skończoną liczbą podmiotów, przy danym wektorze cen  $p \in \mathbb{R}^l$ , nazywa się alokację  $((x^{*a})_{a \in H}, (y^{*b})_{b \in B})$ , w której każdy konsument  $a \in H$  realizuje plan konsumpcji  $x^{*a}$  maksymalizujący jego preferencje w zbiorze budżetowym  $\beta^a(p)$ , a każdy producent  $b \in B$  realizuje plan produkcji  $y^{*b} \in \eta^b(p)$ , który zapewnia mu maksymalny zysk oraz zachodzi warunek:*

$$\sum_{a \in H} x^{*a} - \sum_{b \in B} y^{*b} = \bar{\omega}.$$

W tak zdefiniowanym stanie równowagi popyt nadwyżkowy  $\tilde{z}$  wynosi zero, co oznacza, że popyt netto jest równy całkowitym zasobom ekonomii  $E$ . Arrow i Debreu (1954) pokazali, że w pewnych szczególnych warunkach stan równowagi ekonomii ze skończoną liczbą podmiotów istnieje. Analiza problemu istnienia stanów równowagi systemu ekonomicznego jest podstawowym zadaniem w teorii równowagi ogólnej. W przypadku ewolucyjnego podejścia do modelowania procesów ekonomicznych uznaje się, że stan równowagi jest przejściowym stadium w procesie zachodzenia zmian gospodarczych (zob. np. Lipieta, Malawski 2016).

### 2.2.2. Zmiany ewolucyjne w systemie ekonomicznym ze skończoną liczbą podmiotów

W tej części rozprawy modeluje się w czasie dyskretnym zmiany zachodzące w systemie ekonomicznym opisanym w części 2.2.1. Od momentu rozpoczęcia obserwacji, oś czasu dzieli się na przeliczalną sumę rozłącznych przedziałów, otwartych z prawej i domkniętych z lewej strony. Przedziały te nazywa się *okresami*. Kolejne okresy oznacza się przez  $t_1, t_2, t_3, \dots \in \mathbb{N}$ , gdzie  $t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ . Zakłada się, że w każdym okresie charakterystyki podmiotów ekonomicznych pozostają niezmiennione, a wszelkie zmiany zachodzące w systemie ekonomicznym są odnotowywane w momencie, który rozpoczyna kolejny okres. Gdy rozważane są tylko dwa okresy, to stosuje się dla nich oznaczenia:  $t$  oraz  $t'$  i w takim wypadku dla charakterystyk podmiotów gospodarczych w okresie  $t$  pomija się wskaźnik czasu, a charakterystyki w okresie  $t'$  zapisuje używając wskaźnika „'”.

Niech  $t$  oraz  $t'$ , gdzie  $t < t'$ , oznaczają dwa następujące po sobie okresy. W rozprawie przyjmuje się, że sformułowanie „transformacja systemu ekonomicznego” ma dwa znaczenia: oznacza ona zarówno proces przemian gospodarczych zachodzących przy przejściu od okresu  $t$

do  $t'$ , jak również efekt tego procesu, czyli przekształcony system ekonomiczny. Wprowadzony poniżej formalny opis transformacji systemu ekonomicznego ze skończoną liczbą podmiotów gospodarczych pochodzi z pracy (Pliś 2020).

**Definicja 2.9** *Ekonomię  $E' = (P', C', \theta')$  ze skończoną liczbą podmiotów nazywa się **transformacją ekonomii**  $E = (P, C, \theta)$ , jeśli składowe systemów produkcji  $P = (B, y)$  i konsumpcji  $C = (H, \xi, \varepsilon, \omega)$  ekonomii  $E$  zostały przekształcone na składowe systemów  $P' = (B', y')$  oraz  $C' = (H', \xi', \varepsilon', \omega')$  ekonomii  $E'$ .*

Fakt, że ekonomia  $E'$  jest transformacją ekonomii  $E$  zapisuje się jako:  $E \sqsubset E'$ . Podobne notacje stosuje się dla systemów produkcji i konsumpcji.

**Uwaga 2.3** *Formalnie systemy  $E$  i  $E'$  stanowią dwa różne modele ekonomiczne. Jeśli jednak składowe systemu  $E$  z okresu  $t$  zostały przekształcone na składowe systemu  $E'$  zdefiniowanego w okresie  $t'$ , gdzie  $t' > t$ , to w rozprawie używa się sformułowań: „system ekonomiczny  $E$  ewoluuje” lub „w systemie ekonomicznym  $E$  zachodzi transformacja”. Podobnie rozumie się sformułowania dotyczące systemów konsumpcji i systemów produkcji.*

Przyjmując schumpeterowskie podejście do rozwoju gospodarczego i skupiając uwagę na sferze podażowej, analizuje się zmiany zachodzące w systemie produkcji ekonomii ze skończoną liczbą podmiotów przy przejściu od okresu  $t$  do  $t'$ . Niech  $E = (P, C, \theta)$  będzie systemem ekonomicznym ze skończoną liczbą podmiotów (zob. Definicja 2.7) danym w okresie  $t$ . Niech  $E' = (P', C', \theta')$ ,  $E' \neq E$  będzie taką transformacją systemu  $E$  w okresie  $t'$ , że w obu systemach ekonomicznych działają konsumenci z tego samego zbioru  $H = H'$  oraz producenci ze zbioru  $B = B'$ , przy czym w jednym z rozważanych okresów pewna liczba producentów może być nieaktywna (zob. Uwaga 2.2). Zbiory planów produkcji, które są możliwe do zrealizowania odpowiednio w systemie produkcji:  $P$  oraz  $P'$  oznacza się przez:  $Y$  oraz  $Y'$  (zob. wzór (2.14)). W rozważanym modelu przyjmuje się, że zmiany zachodzące przy przejściu od okresu  $t$  do  $t'$ , które zachodzą w systemie produkcji, wiążą się z odkryciem i wykorzystaniem nowych możliwości działania przez producentów ze zbioru  $B$ . Wprowadzenie innowacji przez pewnego producenta w okresie  $t'$  oznacza, że może on w okresie  $t'$  zrealizować taki plan produkcji, który wykraczał poza możliwości technologiczne wszystkich firm w okresie  $t$ . W konsekwencji, w systemie ekonomicznym w okresie  $t'$  może pojawić się nowy towar lub powstać nowa metoda produkcji.

**Definicja 2.10** System produkcji  $P'$  nazywa się **innowacyjną transformacją** systemu  $P$  (ozn.  $P \sqsubset_{in} P'$ ), jeśli w systemie  $P'$  istnieje plan produkcji, który jest innowacyjny, w odniesieniu do systemu  $P$ , tzn. zachodzi warunek

$$\text{istnieją } b \in B \text{ oraz } y^{tb} \in Y^{tb} \text{ takie, że } y^{tb} \notin Y. \quad (2.20)$$

Producenta  $b \in B$ , który realizuje **innowacyjny plan produkcji**  $y^{tb} \in Y^{tb} \setminus Y$  nazywa się **innowatorem w okresie  $t'$  w odniesieniu do okresu  $t$** .

**Uwaga 2.4** Dla dwóch ustalonych okresów:  $t$  i  $t'$ , w rozprawie używa się krótkich określeń, pisząc: „innowator”, zamiast: „innowator w okresie  $t'$  w odniesieniu do okresu  $t$ ” oraz „plan innowacyjny”, zamiast: „plan innowacyjny, w odniesieniu do systemu  $P$ ”.

**Wniosek 2.2** System produkcji  $P'$  jest innowacyjną transformacją systemu  $P$  wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi warunek:  $Y' \setminus Y \neq \emptyset$ .

Wprowadzona innowacja staje się nowym elementem zasobu wiedzy technologicznej systemu ekonomicznego, rozumianej jako zbiór planów produkcji, z których każdy opisuje sposób produkcji konkretnych towarów.

**Definicja 2.11** System produkcji  $P'$  nazywa się **imitacyjną transformacją** systemu  $P$  (ozn.  $P \sqsubset_{im} P'$ ), jeśli  $P'$  jest taką transformacją  $P$ , która nie jest innowacyjna.

W przypadku transformacji imitacyjnej, w systemie produkcji w okresie  $t'$  nie jest produkowane żadne nowe dobro, ani nie jest używana żadna nowa technologia w odniesieniu do okresu  $t$ .

**Wniosek 2.3** System produkcji  $P'$  jest imitacyjną transformacją systemu  $P$  wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi warunek:  $Y' \subset Y$ .

Niezależnie od tego czy transformacja jest imitacyjna czy innowacyjna, system produkcji może w wyniku tej transformacji ulec destrukcji.

**Definicja 2.12** System produkcji  $P'$  nazywa się **destrukcyjną transformacją** systemu  $P$  (ozn.  $P \sqsubset_d P'$ ), jeśli w okresie  $t'$  zachodzi co najmniej jeden z poniższych warunków:

- (i)  $Y \setminus Y' \neq \emptyset$ , tzn. pewna technologia używana w okresie  $t$ , nie jest używana w okresie  $t'$ ;

- (ii) istnieje  $b \in B$  takie, że  $Y^b \neq \{0\}$  i  $Y^{b'} = \{0\}$  tzn. któryś z producentów aktywnych w okresie  $t$  jest nieaktywny w okresie  $t'$  (zob. Uwaga 2.2).

W szczególnym przypadku, warunek (i) może oznaczać, że pewien towar produkowany w okresie  $t$  nie jest produkowany w okresie  $t'$ . Specjalnym przypadkiem transformacji innowacyjnej jest tzw. twórcza destrukcja systemu produkcji.

**Definicja 2.13** Transformację  $P'$  systemu produkcji  $P$  nazywa się **twórczą destrukcją** (creative detruction) i oznacza  $P \sqsubset_{cd} P'$ , jeśli  $P'$  jest równocześnie innowacyjną i destrukcyjną transformacją systemu  $P$ .

Zaobserwowanie zmian innowacyjnych w systemie produkcji pozwala stwierdzić, że w systemie ekonomicznym  $E$  został zainicjowany rozwój gospodarczy (Lipieta, Malawski 2018).

**Definicja 2.14** Ekonomię  $E'$  nazywa się **innowacyjną transformacją** ekonomii  $E$  (ozn.  $E \sqsubset_{in} E'$ ), jeśli zachodzi warunek:  $P \sqsubset_{in} P'$ .

Ewolucja w przedstawionym modelu może przebiegać w następujący sposób. Niech dane będą okresy  $t_1 < t_2 < t_3$ .

1. W okresie  $t_1$  przy danym systemie cen  $p(t_1)$  system ekonomiczny  $E(t_1)$  znajduje się w stanie równowagi (zobacz Definicja 2.8). Oznacza to, że każdy producent  $b \in B$  maksymalizuje swój zysk, każdy konsument  $a \in H$  maksymalizuje swoje preferencje na zbiorze budżetowym, a popyt nadwyżkowy określony wzorem (2.19) jest równy zero.
2. W okresie  $t_2$  pewien producent  $\bar{b} \in B$  może przeznaczyć część posiadanych środków na badania, dzięki czemu wdraża innowacyjny plan produkcji  $y^{\bar{b}}(t_2) \in Y^{\bar{b}}(t_2) \setminus Y^{\bar{b}}(t_1)$ . Skutkiem wdrożenia planu  $y^{\bar{b}}(t_2)$  jest pojawienie się na rynku nowego towaru, którego cenę ustala innowator  $\bar{b}$  zgodnie z własnym kryterium. W ten sposób równowaga systemu ekonomicznego  $E(t_2)$  zostaje zachwiana.
3. Jeśli w okresie  $t_3$  żadna innowacja nie jest planowana lub wprowadzana przez producentów to, przy cenach z okresu  $t_3$ , system ekonomiczny  $E(t_3)$  może osiągnąć stan równowagi. Wówczas powtarza się sytuacja przedstawiona w punkcie 1. W przeciwnym wypadku, tzn. jeśli któryś z producentów decyduje się na wprowadzenie innowacji, dochodzi do sytuacji analogicznej, jak opisana w punkcie 2.



Szczegółowa konstrukcja stanu równowagi przy niezmiennych cenach dla niewielkiej zmiany zachodzącej w systemie produkcji znajduje się w pracy (Lipieta 2018).

## 2.3. Różnorodność systemu ekonomicznego ze skończoną liczbą producentów i konsumentów

Przestrzeń towarów  $\mathbf{R}^l$  stanowi obszar działania skończonej liczby podmiotów w systemie ekonomicznym zaprezentowanym w części 2.2.1. W przestrzeni tej można określić funkcję różnorodności zgodnie z podejściem zaprezentowanym w podrozdziale 2.1. Atrybutami w przestrzeni towarów mogą być podzbiory towarów posiadających ustalone cechy (takie jak kolor, waga itp.), jak również zbiory towarów, do wytwarzania których użyta została określona technologia. W rozważanym modelu systemu gospodarczego przyjmuje się, że atrybuty stanowią domknięte podzbiory przestrzeni  $\mathbf{R}^l$ .

**Definicja 2.15** Funkcję  $v: 2^{\mathbf{R}^l} \rightarrow [0, +\infty)$  nazywa się **funkcją różnorodności w przestrzeni  $\mathbf{R}^l$** , jeśli istnieje funkcja  $\lambda: 2^{\mathbf{R}^l} \rightarrow [0, +\infty)$  ważąca atrybuty (por. Definicja 2.1) w przestrzeni towarów  $\mathbf{R}^l$  taka, że dla dowolnego  $D \subset \mathbf{R}^l$  istnieje skończona wartość

$$v(D) = \sum_{A \subset \mathbf{R}^l: A \cap D \neq \emptyset} \lambda_A = \sum_{A \in \bar{\Lambda}: A \cap D \neq \emptyset} \lambda_A, \quad (2.21)$$

gdzie  $\bar{\Lambda} := \{A \subset \mathbf{R}^l : \lambda_A > 0\}$  oznacza rodzinę istotnych atrybutów.

**Uwaga 2.5** Można zauważyć, że jeżeli  $\#\bar{\Lambda} < +\infty$ , tzn. rodzina istotnych atrybutów jest skończona, to funkcja różnorodności określona Definicją 2.15 istnieje.

### 2.3.1. Funkcja różnorodności w przestrzeni towarów w modelu ze skończoną liczbą konsumentów

Niech dany będzie system konsumpcji  $C = (H, \xi, \varepsilon, \omega)$  określony Definicją 2.6, w którym działają konsumenci ze skończonego zbioru  $H$ . W rozprawie zakłada się, że każdy konsument  $a \in H$  zna swoje aktualne i przyszłe potrzeby oraz ma ustaloną ich hierarchię (por. Menger 1871). Oznacza to, każdy konsument  $a \in H$  potrafi rozpoznać istotne atrybuty

dowolnego z towarów, a także, że potrafi jednoznacznie przypisać wagi wszystkim atrybutom w przestrzeni  $\mathbf{R}^l$ . Dzięki temu wagi atrybutów w przestrzeni towarów są jednoznacznie określone przez konsumentów działających w danym systemie konsumpcji.

W rozprawie zakłada się, że każdy z konsumentów ze zbioru  $H$  wybiera istotne dla siebie atrybuty ze skończonego zbioru

$$\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}, \text{ gdzie } A_i \subset \mathbf{R}^l, \text{ dla każdego } i = 1, \dots, k, \quad (2.22)$$

gdzie  $k$  jest pewną liczbą naturalną.

**Definicja 2.16** Funkcję  $\lambda^a: 2^{\mathbf{R}^l} \ni A \mapsto \lambda_A^a \in [0, +\infty)$  nazywa się *funkcją ważącą atrybuty konsumenta*  $a \in H$ , jeśli

- 1)  $\Lambda^a := \{A \subset \mathbf{R}^l : \lambda_A^a > 0\} \subset \mathcal{A}$ , gdzie  $\mathcal{A}$  jest rodziną określoną formułą (2.22);
- 2)  $\sum_{A \in \Lambda^a} \lambda_A^a = 1$ , tzn. łączna waga istotnych atrybutów konsumenta  $a$  wynosi 1.

Niech dla każdego  $a \in H$  dana będzie funkcja  $\lambda^a: 2^{\mathbf{R}^l} \ni A \mapsto \lambda_A^a \in [0, +\infty)$  ważąca atrybuty konsumenta  $a$  określona zgodnie z Definicją 2.16.

**Definicja 2.17** Funkcję  $\lambda: 2^{\mathbf{R}^l} \ni A \mapsto \lambda_A \in [0, +\infty)$ , która każdemu atrybutowi  $A \subset \mathbf{R}^l$  przypisuje wagę  $\lambda_A \geq 0$  nadaną mu przez konsumentów ze zbioru skończonego  $H$  równą

$$\lambda_A := \sum_{a \in H} \lambda_A^a, \quad (2.23)$$

nazywa się *funkcją ważącą atrybuty konsumentów ze zbioru skończonego*  $H$ .

Waga przypisana przez konsumentów ze zbioru  $H$  atrybutowi  $A \subset \mathbf{R}^l$ , jest równa sumie wag, jakie temu atrybutowi przypisali poszczególni konsumenci ze zbioru  $H$ . Drugi warunek z Definicji 2.16, spełniony dla każdego konsumenta  $a \in H$ , powoduje że wszyscy konsumenci ze zbioru  $H$  są „traktowani równo”, tzn. wagi przypisane atrybutowi przez każdego z konsumentów mają podobne znaczenie. Suma występująca we wzorze (2.23) jest skończona dla każdego  $A \subset \mathbf{R}^l$ , ze względu na sposób zdefiniowania funkcji ważącej atrybuty każdego z konsumentów.

Zbiór

$$\Lambda := \bigcup_{a \in H} \Lambda^a = \{A \subset \mathbf{R}^l : \text{istnieje } a \in H \text{ taki, że } \lambda_A^a > 0\} \quad (2.24)$$

stanowi *rodzinę atrybutów istotnych dla konsumentów ze zbioru  $H$* . W skład rodziny  $\Lambda$  określonej wzorem (2.24) wchodzi wszystkie te atrybuty z przestrzeni towarów  $\mathbf{R}^l$ , które są istotne dla przynajmniej jednego konsumenta ze zbioru  $H$ .

**Definicja 2.18** *Funkcją różnorodności określoną przez konsumentów ze zbioru skończonego  $H$  nazywa się taką funkcję  $v: 2^{\mathbf{R}^l} \rightarrow [0, +\infty)$ , której wartość dla dowolnego  $D \subset \mathbf{R}^l$  określona jest wzorem:*

$$v(D) = \sum_{A \in \Lambda: A \cap D \neq \emptyset} \lambda_A, \quad (2.25)$$

gdzie dla każdego  $A \subset \mathbf{R}^l$  wartość  $\lambda_A$  jest dana formułą (2.23).

Funkcja różnorodności określona Definicją 2.18 wyznacza różnorodność dowolnego podzbioru przestrzeni towarów z punktu widzenia konsumentów ze zbioru  $H$ . Wartość  $v(D)$ , zdefiniowana wzorem (2.25), nazywa się *różnorodnością zbioru  $D$  określoną przez konsumentów ze zbioru skończonego  $H$*  lub krótko *różnorodnością zbioru  $D$* .

**Uwaga 2.6** *Funkcja różnorodności określona Definicją 2.18 istnieje dla każdego skończonego zbioru konsumentów  $H$ , ze względu na to, że rodzina istotnych atrybutów funkcji określona formułą (2.24) jest skończona (por. Uwaga 2.5).*

**Uwaga 2.7** *Analogicznie jak w części 2.1.1, dla danego atrybutu  $A \subset \mathbf{R}^l$ , elementu przestrzeni towarów  $y \in \mathbf{R}^l$  oraz podzbioru  $D \subset \mathbf{R}^l$  używa się określić: „ $y$  posiada atrybut  $A$ ”, gdy  $y \in A$  oraz „atrybut  $A$  jest realizowany w zbiorze  $D$ ”, jeśli zachodzi warunek  $A \cap D \neq \emptyset$ .*

Funkcja różnorodności spełniająca Definicję 2.18 posiada wszystkie istotne własności funkcji różnorodności określonej Definicją 2.2, w szczególności jest ona zarówno monotoniczna (zob. Spostrzeżenie 2.1) jak i submodularna (zob. Spostrzeżenie 2.4).

**Spostrzeżenie 2.4** *Jeśli  $v: 2^{\mathbf{R}^l} \rightarrow [0, +\infty)$  jest funkcją różnorodności określoną przez konsumentów ze zbioru skończonego  $H$ , to dla dowolnych podzbiorów  $D, T \subset \mathbf{R}^l$  takich, że  $D \subset T$  oraz dla dowolnego elementu  $x \in \mathbf{R}^l$  zachodzą nierówności:*

$$v(D) \leq v(T) \quad \text{oraz} \quad v(T \cup \{x\}) - v(T) \leq v(D \cup \{x\}) - v(D). \quad (2.26)$$

Analogicznie jak w części 2.1.2, dla  $D \subset \mathbf{R}^l$  oraz  $x, y \in \mathbf{R}^l$  liczbę

$$d(x, D) := v(D \cup \{x\}) - v(D) = \sum_{A \subset \mathbf{R}^l: x \in A, A \cap D = \emptyset} \lambda_A \quad (2.27)$$

nazywa się **różnorodnością krańcową zbioru**  $D$ . Podobnie liczbę

$$d(x, y) := d(x, \{y\}) = v(\{x, y\}) - v(\{y\}) = \sum_{A \subset \mathbf{R}^l: x \in A, y \notin A} \lambda_A. \quad (2.28)$$

nazywa się **różnicą między  $x$  a  $y$  z punktu widzenia konsumentów ze zbioru  $H$** .

### 2.3.2. Funkcja różnorodności w systemie ekonomicznym ze skończoną liczbą podmiotów

Niech  $v: 2^{\mathbf{R}^l} \rightarrow [0, +\infty)$  będzie funkcją różnorodności określoną przez konsumentów ze zbioru skończonego  $H$ , którzy działają w systemie konsumpcji  $C$ . W rozważanym modelu przyjmuje się, że dla każdego konsumenta  $a \in H$ , funkcja ważąca atrybuty tego konsumenta, określona Definicją 2.16, wyznacza jego relację preferencji (por. wzór (2.16)) następująco: dla dowolnych  $x, y \in X^a$

$$x \preceq^a y \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \sum_{A \in \Lambda: x \in A} \lambda_A^a \leq \sum_{A \in \Lambda: y \in A} \lambda_A^a. \quad (2.29)$$

Funkcja  $v$ , która mierzy różnorodność poszczególnych podzbiorów przestrzeni towarów ze względu na potrzeby istniejące wśród konsumentów z ustalonego skończonego zbioru  $H$ , może zostać zastosowana w dowolnym systemie ekonomicznym  $E = (P, C, \theta)$ , w którym w systemie konsumpcji  $C$  działają konsumenci ze zbioru  $H$ . Za pomocą tej funkcji można porównywać np. zbiory budżetowe poszczególnych konsumentów przy danym systemie cen i w ten sposób analizować ich wolność wyboru lub ubóstwo w danym systemie ekonomicznym. Dla analizy zmian ewolucyjnych, związanych z innowacyjną działalnością przedsiębiorstw, szczególnie znaczenie ma różnorodność zbioru  $Y = \bigcup_{b \in B} Y^b$  (por. wzór (2.14)) składającego się z tych planów produkcji, które są możliwe do zrealizowania w badanym systemie ekonomicznym.

**Definicja 2.19** *Różnorodnością ekonomii  $E = (P, C, \theta)$  ze skończoną liczbą podmiotów nazywa się liczbę  $v(Y)$ .*

Różnorodność systemu ekonomicznego  $E$  jest wyznaczona przez wartość funkcji  $v: 2^{\mathbf{R}^l} \rightarrow [0, +\infty)$ , określonej przez skończoną liczbę konsumentów działających w systemie konsumpcji  $C$  (zob. Definicja 2.18), na zbiorze planów produkcji, możliwych do zrealizowania przez skończoną liczbę producentów działających w systemie produkcji  $P$ . Tak zdefiniowana liczba  $v(Y)$  określa możliwy poziom zaspokojenia potrzeb konsumentów przez działalność producentów w systemie ekonomicznym  $E$ . Można porównywać różnorodność dwóch różnych systemów ekonomicznych:  $E$  oraz  $E'$  pod warunkiem, że w obu systemach działają konsumenci z ustalonego zbioru skończonego  $H$  i dla każdego konsumenta  $a \in H$  funkcja ważąca jego atrybuty, określona Definicją 2.16, jest w obu systemach ekonomicznych taka sama.

## 2.4. Podsumowanie

W tym rozdziale zaprezentowano wieloatrybutowy model różnorodności skończonego zbioru obiektów, pochodzący od Nehringa i Puppego (2002). Przedstawiono w nim również model systemu gospodarczego ze skończoną liczbą podmiotów ekonomicznych oraz omówiono sposób ewolucji modelowanego systemu w czasie dyskretnym. W zdefiniowanym systemie ekonomicznym określono funkcję różnorodności w przestrzeni towarów, zdefiniowaną przez skończoną liczbę konsumentów działających w tym systemie. Podano również definicję różnorodności systemu ekonomicznego ze skończoną liczbą podmiotów, jako różnorodność zbioru tych planów produkcji, które są możliwe do zrealizowania przez skończoną liczbę producentów działających w tym systemie. W ten sposób zrealizowano pierwszy z podstawowych celów niniejszej rozprawy, którym było uogólnienie definicji różnorodności zbioru zaproponowanej przez Nehringa i Puppego (2002) na różnorodność systemu ekonomicznego. Cel ten został zrealizowany w modelu systemu gospodarczego, w którym działa skończona liczba podmiotów, przy założeniu że każdy z konsumentów wybiera istotne dla siebie atrybuty, ze skończonej rodziny podzbiorów przestrzeni towarów.



## Rozdział 3

# Wpływ zmian ewolucyjnych na różnorodność systemu ekonomicznego ze skończoną liczbą podmiotów

W poprzednim rozdziale przedstawiono model systemu ekonomicznego, w którym w przestrzeni towarów działa skończona liczba podmiotów. W modelu tym skonstruowano funkcję różnorodności, określoną przez konsumentów, dzięki której możliwe stało się wyznaczenie różnorodności dowolnego podzbioru przestrzeni towarów. W szczególności, różnorodność zbioru planów produkcji, możliwych do zrealizowania w systemie ekonomicznym, posłużyła do zdefiniowania różnorodności tego systemu. W tym rozdziale zbadany zostanie wpływ rodzaju zachodzącej transformacji, modelowanej w czasie dyskretnym, na różnorodność systemu ekonomicznego ze skończoną liczbą podmiotów.

Zmiany ewolucyjne zachodzące w systemie gospodarczym mogą być wynikiem pewnych mechanizmów, które można modelować przy użyciu narzędzi matematycznych typowych dla teorii projektowania mechanizmów ekonomicznych (*mechanism design*). Nowatorski pomysł Leonida Hurwicza analizowania procesów ekonomicznych jako mechanizmów, został do teorii ekonomii wprowadzony w 1960 roku jego pracą „Optimality and informational efficiency in resource allocation processes” (Hurwicz 1960). Rozwój teorii projektowania mechanizmów (Hurwicz 1972; 1973; 1986; Hurwicz et al. 1975; Myerson 1979; 1981; Maskin, Riley 1984; Maskin 1999; Hurwicz, Reiter 2006) i jej praktyczna implementacja, zaowocowały przyznaniem Leonidowi Hurwiczowi, Ericowi Maskinowi oraz Rogerowi Myersonowi Nagrody Nobla w 2007 roku. Teoria projektowania mechanizmów ekonomicznych podkreśla znaczenie przepływu informacji w gospodarce, a mechanizmy zazwyczaj konstruuje się w celu rozwiązania

problemów, w których komunikacja pomiędzy podmiotami gospodarczymi jest konieczna do osiągnięcia pożądanego społecznie rezultatu. Hurwiczowskich mechanizmów ekonomicznych używa się między innymi do modelowania rezultatów ewolucji schumpeterowskiej zachodzącej w systemie gospodarczym. Stąd, wyróżnia się takie mechanizmy, których wyniki są typowe dla zmian obserwowanych w dwóch formach gospodarki opisywanych przez Schumpetera (1934), tzn. mechanizm cenowy dla ruchu okrężnego (*circular flow*) i mechanizm jakościowy dla rozwoju gospodarczego (*economic development*) (Lipieta, Malawski 2016). Bada się także właściwości mechanizmów imitacyjnych (Lipieta 2018), eko-mechanizmów, które prowadzą system ekonomiczny do stanu równowagi (Lipieta, Malawski 2021) czy też mechanizmów prowadzących do równowagi w systemie gospodarczym z rynkiem finansowym (Lipieta, Ćwięczek 2022).

Celem badań przeprowadzonych w tym rozdziale jest określenie wzajemnych zależności pomiędzy różnorodnością systemu ekonomicznego i jego ewolucją, poprzez weryfikację hipotez badawczych: H1 i H2. Analiza zmian ewolucyjnych zachodzących w wyniku transformacji systemu ekonomicznego, zostanie w tym rozdziale przeprowadzona przy założeniu, że w systemie ekonomicznym działa skończona liczba podmiotów, a zmiany obserwowane są w czasie dyskretnym. Do określenia wyników zachodzącej transformacji systemu ekonomicznego zostaną użyte metody projektowania mechanizmów ekonomicznych. Porównywanie różnorodności systemu ekonomicznego oraz jego transformacji zostanie przeprowadzone w oparciu o wartości funkcji różnorodności, określonej tak samo dla obu systemów, przy założeniu, że działają w nich konsumenci z tego samego zbioru skończonego. Wyniki przedstawione w podrozdziale 3.1 zostały w większości opublikowane wcześniej w pracy (Pliś 2020), natomiast wyniki podrozdziału 3.2 pochodzą z pracy (Lipieta, Pliś 2022).

### **3.1. Różnorodność a ewolucja systemu ekonomicznego ze skończoną liczbą podmiotów ekonomicznych**

Do opisu zmian ewolucyjnych zachodzących w czasie dyskretnym w systemie ekonomicznym ze skończoną liczbą podmiotów, używa się w proponowanym modelu terminologii przedstawionej w części 2.2.2 niniejszej rozprawy.



### 3.1.1. Zmiana różnorodności systemu ekonomicznego

Niech będą ustalone dwa okresy:  $t$  oraz  $t'$ , przy czym  $t < t'$ . Niech  $E = (P, C, \theta)$  będzie systemem ekonomicznym w okresie  $t$ , opisanym w części 2.2.1 (zob. Definicja 2.7), a  $E' = (P', C', \theta')$  – jego transformacją w okresie  $t'$  (zob. Definicja 2.9), przy czym  $E \neq E'$ . Niech w obu systemach ekonomicznych:  $E$  oraz  $E'$  działają konsumenci z tego samego skończonego zbioru  $H$ . Wówczas funkcja różnorodności  $v: 2^{\mathbf{R}^I} \rightarrow [0, +\infty)$  określona przez konsumentów ze zbioru  $H$  zgodnie z Definicją 2.18, może zostać użyta do wyznaczania różnorodności podzbiorów przestrzeni towarów w obu systemach ekonomicznych:  $E$  oraz  $E'$ . Niech w obu systemach:  $E$  oraz  $E'$  działają producenci z tego samego skończonego zbioru  $B$ . Niech  $Y$  oznacza zbiór technologicznie możliwych planów produkcji w systemie produkcji  $P$  (zob. Definicja 2.14), natomiast  $Y'$  oznacza zbiór tych planów produkcji, które są możliwe do wykonania w systemie produkcji  $P'$ . Wówczas różnorodność systemu ekonomicznego  $E$ , zgodnie z Definicją 2.19 wyznacza liczba  $v(Y)$ , natomiast liczba  $v(Y')$  określa różnorodność systemu ekonomicznego  $E'$ .

**Uwaga 3.1** Przy powyższych ustaleniach sformułowanie: „**różnorodność systemu ekonomicznego  $E$  rośnie**” oznacza, że zachodzi warunek:  $v(Y) < v(Y')$ . Podobnie, sformułowanie: „**różnorodność  $E$  maleje**” oznacza, że zachodzi nierówność:  $v(Y) > v(Y')$ , a określenie: „**różnorodność ekonomii  $E$  nie zmienia się**” oznacza, że:  $v(Y) = v(Y')$ .

Można zauważyć, że pomiędzy poszczególnymi rodzajami transformacji systemu produkcji opisanymi w części 2.2.2 a zmianą różnorodności systemu ekonomicznego zachodzą następujące zależności.

**Spostrzeżenie 3.1 (Pliś 2020)** Warunkiem koniecznym wzrostu różnorodności systemu ekonomicznego  $E$ , jest zrealizowanie innowacyjnego planu produkcji (zob. Uwaga 2.4) przez pewnego producenta  $b \in B$ , tzn. zachodzi implikacja:

$$\text{jeśli } v(Y) < v(Y'), \text{ to } P \sqsubset_{in} P'. \quad (3.1)$$

*Dowód.* Niech zgodnie z założeniem zachodzi nierówność:  $v(Y) < v(Y')$ . Dla dowodu nie wprost można przyjąć, że nie zachodzi następnik implikacji, tzn. nie zachodzi warunek:  $P(t) \sqsubset_{in}$

$P(t')$ . Wówczas z Definicji 2.10 zachodzi inkluzja:  $Y' \subset Y$ . Na mocy Spostrzeżenia 2.4 funkcja różnorodności określona Definicją 2.18 jest monotoniczna, zatem  $v(Y') \leq v(Y)$ , co jest sprzeczne z przyjętym założeniem. Wobec powyższego, implikacja (3.1) jest prawdziwa. ■

Na podstawie powyższego spostrzeżenia, można stwierdzić, że innowacyjna transformacja systemu produkcji jest jedynym rodzajem transformacji, która może wywołać wzrost różnorodności systemu ekonomicznego.

**Wniosek 3.1** *Jeśli zachodzi transformacja imitacyjna systemu produkcji, to różnorodność systemu ekonomicznego  $E$  nie rośnie, tzn. zachodzi implikacja:*

$$\text{jeśli } P \sqsubset_{im} P', \text{ to } v(Y) \geq v(Y').$$

**Wniosek 3.2** *Niech  $P \sqsubset_{in} P'$ . Jeśli różnorodność systemu ekonomicznego  $E$  maleje, to transformacja systemu produkcji jest destrukcyjna, tzn. zachodzi implikacja:*

$$\text{jeśli } v(Y') < v(Y), \text{ to } P \sqsubset_d P'.$$

Okazuje się, że twierdzenie przeciwne do Wniosku 3.2 nie jest prawdziwe i nie każda transformacja destrukcyjna powoduje zmniejszenie różnorodności systemu ekonomicznego (zob. część 3.1.3).

**Wniosek 3.3** *Niech  $P \sqsubset_{in} P'$ . Jeśli różnorodność systemu ekonomicznego  $E$  maleje, to transformacja systemu produkcji jest destrukcyjna, tzn. zachodzi implikacja:*

$$\text{jeśli } v(Y') < v(Y), \text{ to } P \sqsubset_d P'.$$

### 3.1.2. Innowacje i istotne innowacje w systemie ekonomicznym

Spostrzeżenie 3.1 określa warunek konieczny dla wzrostu różnorodności systemu ekonomicznego. Jest nim użycie przez pewnego producenta  $b \in B$  innowacyjnego planu produkcji  $y' \in Y' \setminus Y$ . Wprowadzenie takiego planu produkcji nie musi jednak spowodować wzrostu różnorodności systemu ekonomicznego. Może to być związane z tym, że:

- 1) w systemie produkcji zachodzi równocześnie transformacja destrukcyjna, która powoduje, że różnorodność systemu ekonomicznego maleje;

- 2) wprowadzony przez innowatora plan produkcji nie posiada żadnego atrybutu, który jest równocześnie: istotny dla konsumentów i niemożliwy do zrealizowania w poprzednim okresie.

Intuicję zawartą w punkcie drugim można, wykorzystując definicje przedstawione w podrozdziale 2.2, sformalizować następująco. Niech  $\Lambda$  będzie rodziną atrybutów istotnych dla konsumentów ze zbioru  $H$  (zob. wzór (2.24)), a  $y' \in Y' \setminus Y$  – innowacyjnym planem produkcji. Niech dla każdego atrybutu  $A \in \Lambda$  zachodzi implikacja: jeśli  $y' \in A$ , to  $Y \cap A \neq \emptyset$ , tzn. każdy istotny atrybut posiadany przez plan  $y'$  jest realizowany w zbiorze  $Y$ . Wówczas  $v(Y \cup \{y'\}) = v(Y)$ .

**Definicja 3.1** Plan produkcji  $y' \in Y'$  nazywa się *planem istotnie innowacyjnym* w systemie produkcji  $P'$  w odniesieniu do systemu  $P$ , jeśli zachodzi warunek:

$$d(y', Y) = v(Y \cup \{y'\}) - v(Y) > 0. \quad (3.2)$$

**Uwaga 3.2** Gdy systemy produkcji  $P$  oraz  $P'$  są ustalone, to istotnie innowacyjny plan produkcji w systemie produkcji  $P'$  w odniesieniu do systemu  $P$ , krótko nazywa się *planem istotnie innowacyjnym*.

Plan produkcji możliwy do zrealizowania w systemie produkcji  $P'$  jest planem istotnie innowacyjnym, jeśli powoduje on przyrost różnorodności krańcowej zbioru  $Y$  określonej formułą (2.27).

**Spostrzeżenie 3.2** Każdy istotnie innowacyjny plan produkcji jest planem innowacyjnym, tzn. dla każdego  $y' \in Y'$  zachodzi implikacja:

$$\text{jeśli } d(y', Y) > 0, \text{ to } y' \in Y' \setminus Y.$$

Powyższe Spostrzeżenie wynika z monotoniczności funkcji różnorodności (zob. Spostrzeżenie 2.4). Można zauważyć, że jeśli  $y'$  jest planem istotnie innowacyjnym, a  $y$  – dowolnym planem technologicznie możliwym do wykonania w systemie produkcji  $P$ , to różnica ekonomiczna między  $y'$  a  $y$  określona wzorem (2.28) jest dodatnia. Formalnie można to zapisać w poniższy sposób.

**Spostrzeżenie 3.3** Jeśli  $y \in Y$  oraz  $d(y', Y) > 0$ , to  $d(y', y) > 0$ .

*Dowód.* W oparciu o Spostrzeżenie 2.4, można zauważyć, że:  $d(y', y) = v(\{y, y'\}) - v(\{y\}) \geq v(Y \cup \{y'\}) - v(Y) = d(y', Y) > 0$ . ■

**Definicja 3.2** System produkcji  $P'$  nazywa się **istotnie innowacyjną transformacją** systemu  $P$  (ozn.  $P \sqsubset_{inn} P'$ ), jeśli w  $P'$  istnieje istotnie innowacyjny plan produkcji określony Definicją 3.1.

**Definicja 3.3** System ekonomiczny  $E'$  nazywa się **istotnie innowacyjną transformacją** systemu  $E$  (ozn.  $E \sqsubset_{inn} E'$ ), jeśli zachodzi  $P \sqsubset_{inn} P'$ .

**Wniosek 3.4** Każda istotnie innowacyjna transformacja systemu ekonomicznego jest jego transformacją innowacyjną.

**Spostrzeżenie 3.4** Jeśli system produkcji  $P'$  jest taką transformacją systemu  $P$ , która jest istotnie innowacyjna oraz nie jest transformacją destrukcyjną, to różnorodność systemu ekonomicznego rośnie, tzn. zachodzi implikacja:

$$\text{jeśli } P \sqsubset_{inn} P' \text{ i nie zachodzi warunek } P \sqsubset_d P', \text{ to } v(Y) < v(Y'). \quad (3.3)$$

### 3.1.3. Różnorodność a twórcza destrukcja systemu ekonomicznego

Z Wniosku 3.3 wiadomo, że zmniejszenie różnorodności systemu ekonomicznego jest spowodowane zachodzącą w systemie produkcji transformacją destrukcyjną, która może spowodować eliminację z systemu produkcji niektórych towarów lub technologii (por. Definicja 2.12). Można jednak wskazać taką rodzinę destrukcyjnych transformacji systemu produkcji, które nie powodują zmniejszenia różnorodności systemu ekonomicznego. Zaliczają się do niej transformacje destrukcyjne, w których:

- z systemu produkcji eliminowane są jedynie atrybuty nieistotne dla konsumentów;
- równoczesna transformacja innowacyjna powoduje przejęcie istotnych atrybutów eliminowanych planów produkcji przez plany innowacyjne.

Jako przykład dla tej ostatniej intuicji niech służy atrybut: „narzędzie służące do prania odzieży”. Atrybut ten posiadała, używana kiedyś w Polsce, tarcza do prania. Obecnie to narzędzie nie jest już powszechnie używane w Polsce, ale wspomniany atrybut jest nadal realizowany przez

producentów, o czym świadczyć może obecność pralek czy też pralko-suszarek w większości polskich gospodarstw domowych.

Niech  $\Lambda$  będzie rodziną atrybutów istotnych dla konsumentów ze zbioru  $H$  (zob. wzór (2.24)). Transformacja  $P'$  „zachowuje” wszystkie istotne atrybuty systemu produkcji  $P$ , gdy dla każdego  $A \in \Lambda$  zachodzi następująca implikacja:

$$\text{jeśli } Y \cap A \neq \emptyset, \text{ to } Y' \cap A \neq \emptyset. \quad (3.4)$$

Można zauważyć, że spośród transformacji innowacyjnych warunek (3.4) jest spełniony w przypadku, gdy  $Y \subset Y'$ , tzn. dla każdej transformacji, która nie jest destrukcyjna. Spośród transformacji, które zakładają twórczą destrukcję systemu produkcji (zob. Definicja 2.13) można wyróżnić rodzinę transformacji, które spełniają warunek (3.4).

**Definicja 3.4 (Lipieta, Pliś 2022)** Niech  $P \sqsubseteq_{cd} P'$ . Jeśli zachodzi warunek (3.4), to system produkcji  $P'$  nazywa się *v-twórczą destrukcją* systemu  $P$ .

Transformacja systemu ekonomicznego, w której system produkcji podlega *v-twórczej* destrukcji jest transformacją innowacyjną, w której zachodzące zmiany destrukcyjne obejmują jedynie przestarzałe rozwiązania produkcyjne i niechciane towary. Taki rodzaj zmian, który jest naturalnym sposobem ewoluowania gospodarki, odpowiada procesowi opisywanemu przez Josepha A. Schumpetera jako twórcza destrukcja (por. Schumpeter 1942).

**Spostrzeżenie 3.5 (Lipieta, Pliś 2022)** W przypadku *v-twórczej* destrukcji systemu produkcji różnorodność systemu ekonomicznego nie maleje, tzn.

$$\text{jeśli } P \sqsubseteq_v P', \text{ to } v(Y) \leq v(Y').$$

W pewnych przypadkach transformacja, która jest *v-twórczą* destrukcją systemu produkcji, może spowodować wzrost różnorodności systemu ekonomicznego. Mianowicie, dzięki Spostrzeżeniom 3.4 oraz 3.5 można zauważyć co następuje.

**Spostrzeżenie 3.6** Jeśli w *v-twórczej* destrukcji  $P'$  systemu  $P$  istnieje istotnie innowacyjny plan produkcji, to różnorodność systemu ekonomicznego  $E$  rośnie, tzn. jeśli  $d(y', Y) > 0$  dla pewnego  $y' \in Y'$  i spełniony jest warunek (3.4), to  $v(Y) < v(Y')$ .

**Wniosek 3.5** *Istotnie innowacyjna transformacja systemu ekonomicznego  $E$ , która spełnia warunek (3.4), tzn. zachowuje wszystkie istotne atrybuty sprawia, że różnorodność systemu  $E$  rośnie.*

## 3.2. Różnorodność a mechanizmy ewolucji ekonomicznej

Opisywany w podrozdziale 3.1, wzajemny wpływ zmian zachodzących w systemie ekonomicznym na jego różnorodność, można analizować dla mechanizmów ewolucyjnych zdefiniowanych zgodnie z podejściem Leonida Hurwicza (1960).

### 3.2.1. Mechanizm ekonomiczny w ujęciu L. Hurwicza

Hurwiczowski mechanizm ekonomiczny można rozumieć jako system wymiany i przetwarzania informacji pomiędzy podmiotami gospodarczymi. Konstrukcja takiego mechanizmu wymaga wyodrębnienia środowiska ekonomicznego, a także określenia przestrzeni informacji oraz funkcji celu działań podmiotów ekonomicznych. *Środowisko ekonomiczne* opisuje podmioty gospodarcze. Przyjmuje się, że podmioty gospodarcze generują sygnały, które mogą służyć do wzajemnej komunikacji. Sygnały tworzą tzw. *przestrzeń informacji*. Z kolei *funkcja celu*, każdemu środowisku ekonomicznemu przypisuje rezultat mechanizmu.

Niech  $E$  oznacza zbiór środowisk ekonomicznych,  $M$  będzie przestrzenią informacji, a  $Z$  składa się z wyników działań podjętych przez podmioty ekonomiczne na podstawie wysyłanych sygnałów. Zbiory  $E$ ,  $M$  i  $Z$  są ze sobą związane poprzez dwa odwzorowania: korespondencję zatwierdzania informacji oraz funkcję wyniku. *Korespondencją zatwierdzania informacji* nazywa się przyporządkowanie  $\mu: E \rightarrow M$ , które środowisku ekonomicznemu przypisuje zbiór możliwych sygnałów wysyłanych przez podmioty ekonomiczne. *Funkcją wyniku* nazywa się przyporządkowanie  $h: M \rightarrow Z$ , które każdemu sygnałowi przypisuje rezultat działań podjętych w odpowiedzi na ten sygnał przez podmioty.

**Definicja 3.5 (Hurwicz, Reiter 2006)** *Mechanizmem ekonomicznym w sensie Hurwicza (mechanizmem hurwiczowskim) nazywa się trójkę  $\Gamma = (M, \mu, h)$ , w której  $M$  stanowi przestrzeń informacji,  $\mu: E \rightarrow M$  jest korespondencją zatwierdzania informacji, a  $h: M \rightarrow Z$  stanowi funkcję wyniku.*

### 3.2.2. System ekonomiczny jako środowisko hurwiczowskiego mechanizmu

Zmiany ewolucyjne zachodzące w systemie ekonomicznym można modelować poprzez mechanizm hurwiczowski. Środowisko mechanizmu jest w tym przypadku utożsamiane z systemem ekonomicznym, a sygnały stanowią działania realizowane w tym systemie przez producentów i konsumentów. Mechanizm hurwiczowski, którego wyniki są obserwowane w systemie ekonomicznym, który stanowi jego środowisko, nazywa się mechanizmem statycznym. Jeśli rezultaty mechanizmu są obserwowane w transformacji systemu ekonomicznego, to taki mechanizm nazywa się mechanizmem dynamicznym. Szczegółowy opis kluczowych, z punktu widzenia schumpeterowskiej wizji rozwoju gospodarczego, własności mechanizmów hurwiczowskich można znaleźć w pracy (Lipieta, Malawski 2021).

Niech  $K := B \cup H$  będzie zbiorem podmiotów, gdzie  $B$  i  $H$  są odpowiednio zbiorami: producentów i konsumentów, działających na rynku  $l$  towarów. Zbiór  $K$  jest zbiorem o liczebności  $\#K = \kappa \leq n + m$ , przy czym  $n \in \mathbb{N}$  oznacza skończoną liczbę producentów, a  $m \in \mathbb{N}$  – skończoną liczbę konsumentów. Niech dany będzie system ekonomiczny  $E = (P, C, \theta)$  w okresie  $t$ , gdzie  $P = (B, y)$  jest systemem produkcji, a  $C = (H, \xi, \varepsilon, \omega)$  jest systemem konsumpcji (por. Definicja 2.7). W prezentowanym modelu zakłada się, że każdy podmiot  $k \in K$ , działający w systemie ekonomicznym  $E$ , może zostać scharakteryzowany jako producent lub konsument. Określa się zatem dla każdego podmiotu  $k \in K$  w okresie  $t$  (por. część 2.2.1):

- zbiór produkcji  $Y^k$  i zbiór konsumpcji  $X^k$ :

$$Y^k := \begin{cases} Y^b, & k \in B \\ \{0\}, & k \notin B \end{cases}, \quad X^k := \begin{cases} X^a, & k \in H \\ \{0\}, & k \notin H \end{cases};$$

- wektor zasobu  $\omega^k$  oraz relację preferencji  $\preceq^k$ :

$$\omega^k := \begin{cases} \omega^a, & k \in H \\ \mathbf{0} \in \mathbf{R}^l, & k \notin H \end{cases}, \quad \preceq^k := \begin{cases} \preceq^a, & k \in H \\ \emptyset, & k \notin H \end{cases}.$$

Udziały konsumentów w zyskach producentów  $\Theta: K \times K \rightarrow [0, 1]$  w okresie  $t$  definiuje się dla

każdego podmiotu  $k \in K$  następująco:

$$\Theta(k, \cdot) := \begin{cases} 0, & k \notin H \\ \theta(a, \cdot), & k \in H \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \Theta(\cdot, k) := \begin{cases} 0, & k \notin B \\ \theta(\cdot, b), & k \in B \end{cases}.$$

Jeśli  $k \in K$  jest podmiotem działającym w systemie ekonomicznym  $E$ , to zestaw charakterystyk

$$e^k := (Y^k, X^k, \omega^k, \preceq^k, \Theta) \quad (3.5)$$

nazywa się **środowiskiem podmiotu  $k$  w okresie  $t$** . Każde środowisko ustalonego podmiotu  $k \in K$  w okresie  $t$  składa się więc ze: zbioru produkcji  $Y^k$ , zbioru konsumpcji  $X^k$ , wektora zasobu  $\omega^k$ , relacji preferencji  $\preceq^k$  oraz wielkości udziałów w zyskach przypisanych podmiotowi  $k$  w pewnym systemie ekonomicznym  $E$ . Wszystkie możliwe charakterystyki podmiotu  $k$  jako konsumenta i producenta w okresie  $t$  określa zbiór:

$$E^k := \{e^k : e^k \text{ jest środowiskiem podmiotu } k \text{ w okresie } t\}.$$

Iloczyn kartezjański:

$$E = E^1 \times \dots \times E^\kappa$$

tworzy **zbiór środowisk w okresie  $t$** , a każdy element tego iloczynu postaci

$$e := (e^1, \dots, e^\kappa) \in E \quad (3.6)$$

nazywa się **środowiskiem w okresie  $t$** . Każde tak zdefiniowane środowisko w okresie  $t$  można utożsamić z pewnym systemem ekonomicznym  $E$  w okresie  $t$ .

W środowisku  $e \in E$ , przy wektorze cen  $p \in \mathbf{R}^l$ , każdy podmiot  $k \in K$  wybiera swoje plany działania jako producent oraz konsument, tzn. ustala swój plan produkcji  $y^k \in Y^k$  oraz plan konsumpcji  $x^k \in \beta^k(p)$ , gdzie  $\beta^k(p)$  stanowi zbiór budżetowy podmiotu  $k$  jako konsumenta w systemie ekonomicznym  $E$ . Każdy **sygnał wysyłany przez podmiot  $k \in K$  w środowisku  $e \in E$**  ma postać:

$$m^k(e) := (p, y^k, x^k) \quad (3.7)$$

i należy go rozumieć jako zestaw działań, które podejmuje podmiot  $k$  jako producent i konsu-



ment w systemie ekonomicznym  $E$  przy systemie cen  $p$ . Zakłada się przy tym, że każdy podmiot wie jakie działania w trwającym okresie podejmują pozostali uczestnicy rynku, tzn. zna wszystkie plany konsumpcji i plany produkcji realizowane w okresie  $t$ . **Zbiór możliwych sygnałów wysyłanych przez podmiot  $k$  w środowisku  $e \in E$**  oznacza się przez

$$M^k(e) := \{m^k(e) = (p, y^k, x^k) : y^k \in Y^k, x^k \in \beta^k(p)\}.$$

W rozpatrywanym modelu zakłada się, że dla każdego  $k$  zbiór  $M^k(e)$  jest niepusty. Przyjmuje się również, że spośród możliwych sygnałów ze zbioru  $M^k(e)$  podmiot  $k$  wybiera dokładnie jeden. Każdy **sygnał wysyłany przez środowisko  $e \in E$**  jest zestawieniem sygnałów  $m^k(e) \in M^k(e)$  poszczególnych podmiotów ekonomicznych  $k \in K$  i ma postać:

$$m(e) := \left( (p, y^1, x^1), \dots, (p, y^\kappa, x^\kappa) \right). \quad (3.8)$$

Zbiór wszystkich sygnałów wysyłanych przez środowisko  $e \in E$  oznacza się przez

$$M(e) = M^1(e) \times \dots \times M^\kappa(e). \quad (3.9)$$

Zbiór sygnałów wysyłanych przez wszystkie możliwe środowiska ekonomiczne (czyli wszystkie systemy ekonomiczne w okresie  $t$ ) jest postaci:

$$M := \bigcup_{e \in E} M(e). \quad (3.10)$$

Odwzorowanie  $\mu: E \rightarrow M$  przypisuje każdemu środowisku  $e \in E$  zbiór  $M(e)$  możliwych sygnałów wysyłanych przez to środowisko.

### 3.2.3. Mechanizmy ewolucji schumpeterowskiej

Mechanizm opisujący zmiany zachodzące w systemie ekonomicznym jest mechanizmem dynamicznym, co oznacza, że jego rezultaty są obserwowane w pewnej transformacji systemu gospodarczego (zob. część 2.2.2).

Niech będą ustalone dwa okresy:  $t < t'$ . Niech  $E = (P, C, \theta)$  będzie systemem ekonomicznym (zob. Definicja 2.7) w okresie  $t$ . Niech  $P = (B, y)$  stanowi system produkcji tej eko-

nomii, a  $C = (H, \xi, \varepsilon, \omega)$  – jej system konsumpcji. Niech  $E' = (P', C', \theta')$  będzie transformacją systemu  $E$  w okresie  $t'$  zgodnie z Definicją 2.9. Niech  $P' = (B', y')$  oraz  $C' = (H, \xi', \varepsilon', \omega')$  będą odpowiednio: systemem produkcji i systemem konsumpcji ekonomii  $E'$ .

Niech dane będzie przekształcenie przestrzeni towarów  $Q: \mathbf{R}^l \rightarrow \mathbf{R}^l$ .

**Twierdzenie 3.1** *Jeśli dla każdego  $k \in K$  i dla każdego  $y^k \in Y^k$  plan produkcji  $Q(y^k)$  jest możliwy do zrealizowania przez producenta  $k$  w systemie produkcji  $P'$ , to odwzorowanie  $Q: \mathbf{R}^l \rightarrow \mathbf{R}^l$  określa dynamiczny mechanizm hurwiczowski, którego rezultaty są obserwowane w transformacji  $E'$  systemu ekonomicznego  $E$ .*

*Dowód.* W celu zdefiniowania mechanizmu  $\Gamma = (M, \mu, h)$  określa się:

- korespondencję informacji  $\mu: E \rightarrow M$ , która każdemu środowisku  $e \in E$  przypisuje zbiór sygnałów wysyłanych przez podmioty działające w tym środowisku, tzn.:  $\mu(e) = M(e)$ ;
- zbiór wyników postaci:

$$Z := \left\{ (x'^1, \dots, x'^k), (y'^1, \dots, y'^k) : x'^k \in \mathbf{R}^l, y'^k \in Y'^k, k \in K \right\};$$

- funkcję wyniku  $h: M(e) \rightarrow Z$ , gdzie dla dowolnego sygnału  $m(e) \in M(e)$ :

$$h(m(e)) = \left( (x'^1, \dots, x'^k), (Q(y^1), \dots, Q(y^k)) \right).$$

Transformacja  $E' = (P', C', \theta')$  systemu ekonomicznego  $E = (P, C, \theta)$ , w której obserwowane są rezultaty mechanizmu, jest określona w ten sposób, że:

- $Y'^k = Q(Y^k)$ ,
- $X'^k = X^k, \omega'^k = \omega^k, \preceq'^k = \preceq^k, \Theta' = \Theta$ .

Tak skonstruowany mechanizm  $\Gamma = (M, \mu, h)$ , jest mechanizmem dynamicznym. ■

Można również analizować mechanizmy, w których dochodzi do zmiany charakterystyk całego systemu ekonomicznego, w szczególności również charakterystyk systemu konsumpcji, ale nie są one analizowane w niniejszej rozprawie.

Rodzaj mechanizmu hurwiczowskiego  $\Gamma = (M, \mu, h)$  skonstruowanego w dowodzie Twierdzenia 3.1 zależy od tego, jaką transformację systemu produkcji (zob. część 2.2.2) używa się w jego rezultacie.

**Definicja 3.6 (Lipiet, Malawski 2021)**  $\Gamma = (M, \mu, h)$  nazywa się mechanizmem

- *imitacyjnym*, gdy jego rezultatem jest transformacja  $P'$  taka, że  $P \sqsubset_{im} P'$ ;
- *innovacyjnym*, jeśli skutkuje transformacją  $P'$  taką, że  $P \sqsubset_{in} P'$ ,
- *twórczej destrukcji*, pod warunkiem, że równocześnie zachodzi  $P \sqsubset_{in} P'$  oraz  $P \sqsubset_d P'$ .

Rodzaj transformacji systemu produkcji, którą określa mechanizm hurwiczowski, zależy od sposobu zdefiniowania odwzorowania  $Q: \mathbf{R}^l \rightarrow \mathbf{R}^l$ , które przekształca zbiory produkcji poszczególnych podmiotów.

**Spostrzeżenie 3.7 (Lipiet, Malawski 2021)** Niech  $Q: \mathbf{R}^l \rightarrow \mathbf{R}^l$  będzie odwzorowaniem określonym w dowodzie Twierdzenia 3.1. Wówczas

- (i) jeżeli dla każdego  $y \in Y$  zachodzi  $Q(Y) \subset Y$ , to  $\Gamma$  jest mechanizmem imitacyjnym;
- (ii) jeżeli istnieje  $y \in Y$  taki, że  $Q(y) \notin Y$ , to  $\Gamma$  jest mechanizmem innovacyjnym;
- (iii) jeśli zachodzi (ii) oraz istnieje  $y \in Y$  takie, że  $y \notin Q(Y)$ , to  $\Gamma$  jest mechanizmem twórczej destrukcji.

### 3.2.4. Różnorodność a mechanizmy ewolucji schumpeterowskiej

Niech  $E = (P, C, \theta)$  będzie systemem ekonomicznym w okresie  $t$ , a  $E' = (P', C', \theta')$  – transformacją systemu  $E$  w okresie  $t'$ , w której obserwowane są rezultaty mechanizmu hurwiczowskiego  $\Gamma$ , zdefiniowanego w dowodzie Twierdzenia 3.1. Można zauważyć, na podstawie sposobu zdefiniowania mechanizmu  $\Gamma$ , że w systemach ekonomicznych  $E$  oraz  $E'$  działają konsumenci z tego samego zbioru  $H$ . Można więc porównywać różnorodność systemów ekonomicznych  $E$  oraz  $E'$  używając funkcji różnorodności  $v: 2^{\mathbf{R}^l} \rightarrow [0, +\infty)$  określonej przez konsumentów ze zbioru  $H$  zgodnie z Definicją 2.18 jednakowo w obu systemach ekonomicznych.

Dynamiczny mechanizm hurwiczowski skonstruowany w dowodzie Twierdzenia 3.1 może skutkować zmianą różnorodności systemu ekonomicznego (zob. Definicje: 2.19 oraz 3.1).

**Wniosek 3.6** *Niech dany będzie mechanizm  $\Gamma$  określony w dowodzie Twierdzenia 3.1. Wówczas:*

- 1) jeśli różnorodność systemu ekonomicznego zwiększa się, to  $\Gamma$  jest mechanizmem innowacyjnym (por. Spostrzeżenie 3.1);*
- 2) jeśli  $\Gamma$  jest mechanizmem imitacyjnym, to różnorodność systemu ekonomicznego się nie zwiększa (por. Wniosek 3.1);*
- 3) jeśli różnorodność systemu ekonomicznego się zmniejsza, to  $\Gamma$  jest mechanizmem destrukcyjnym (por. Wniosek 3.2);*
- 4) jeśli  $\Gamma$  jest mechanizmem twórczej destrukcji, to różnorodność systemu ekonomicznego mogła zmienić się w dowolny sposób (zob. części 3.1.2 oraz 3.1.3).*

Szczególnie interesujący jest ostatni przypadek mechanizmu, który będąc równocześnie destrukcyjnym jak i innowacyjnym, może wywołać dowolną zmianę różnorodności systemu ekonomicznego.

Na bazie funkcji różnorodności określonej przez konsumentów ze zbioru skończonego  $H$  (zob. Definicja 2.18), w systemie można zdefiniować dodatkowe dwa rodzaje dynamicznego mechanizmu hurwiczowskiego  $\Gamma$ , który występuje w dowodzie Twierdzenia 3.1.

**Definicja 3.7** *Mechanizm  $\Gamma$  nazywa się **istotnie innowacyjnym**, jeśli jego rezultatem transformacji  $P'$  systemu produkcji  $P$ , która spełnia warunek  $P \sqsubseteq_{inn} P'$  (zob. Definicja 3.2).*

**Definicja 3.8** *Mechanizm  $\Gamma$  nazywa się **mechanizmem  $v$ -twórczej destrukcji**, jeśli jego rezultatem jest taka transformacja  $P'$  systemu produkcji  $P$ , dla której zachodzi warunek  $P \sqsubseteq_v P'$  (zob. Definicja 3.4).*

Hurwiczowski mechanizm  $v$ -twórczej destrukcji ma szczególne znaczenie dla różnorodności systemu ekonomicznego. Następujące wnioski otrzymuje się na podstawie Spostrzeżeń 3.5 oraz 3.6, odpowiednio.

**Wniosek 3.7** *Jeśli  $\Gamma$  jest mechanizmem hurwiczowskim zdefiniowanym w dowodzie Twierdzenia 3.1, który jest mechanizmem  $v$ -twórczej destrukcji, to  $\Gamma$  nie zmniejsza różnorodności systemu ekonomicznego; jeśli dodatkowo  $\Gamma$  jest mechanizmem istotnie innowacyjnym, to w jego wyniku zwiększa się różnorodność systemu ekonomicznego.*

Zaprojektowanie takiego mechanizmu hurwiczowskiego, którego wyniki byłyby obserwowane w istotnie innowacyjnej  $v$ -twórczej destrukcji systemu ekonomicznego ma szczególne znaczenie z punktu widzenia konsumentów danej ekonomii. Zgodnie z Twierdzeniem 3.1 konstrukcja mechanizmu  $\Gamma$  opiera się na odpowiednim zdefiniowaniu odwzorowania  $Q: \mathbf{R}^l \rightarrow \mathbf{R}^l$ , który przekształca każdy ze zbiorów produkcji  $Y^k$  na zbiór  $Y'^k$ . Mechanizm  $\Gamma$  jest istotnie innowacyjny, o ile istnieje podmiot ekonomiczny  $k$  dla którego zachodzi warunek (por. Definicja 3.1)

$$v(Y \cup \{y'\}) > v(Y), \text{ gdzie } y' = Q(y) \text{ dla pewnego } y \in Y. \quad (3.11)$$

Mechanizm  $\Gamma$  jest mechanizmem  $v$ -twórczej destrukcji, o ile każdy istotny atrybut realizowany w zbiorze  $Y$  jest również realizowany przez pewien zbiór  $Q(Y^k)$  (por. wzór (3.4)), tzn.

$$\text{jeśli } Y \cap A \neq \emptyset, \text{ to istnieje } k \text{ taki, że } Q(Y^k) \cap A \neq \emptyset \text{ dla każdego } A \in \Lambda, \quad (3.12)$$

gdzie  $\Lambda$  jest rodziną istotnych atrybutów opisaną formułą (2.24).

**Wniosek 3.8** *Jeśli odwzorowanie  $Q: \mathbf{R}^l \rightarrow \mathbf{R}^l$  spełnia warunki (3.11) oraz (3.12), to mechanizm skonstruowany w dowodzie Twierdzenia 3.1 skutkuje wzrostem różnorodności systemu ekonomicznego.*

### 3.2.5. Różnorodność a mechanizmy eko-innowacyjne

Szczególnego rodzaju mechanizmem, którego rezultatem może być zwiększenie różnorodności systemu ekonomicznego, jest tzw. mechanizm eko-innowacyjny (zob. Lipieta, Pliś 2022). Poniżej przedstawiono konstrukcję takiego mechanizmu eko-innowacyjnego, w wyniku którego szkodliwy towar przestaje być używany przez producentów. Ten rodzaj mechanizmu stanowi przykład mechanizmu destrukcyjnego.

Niech w systemie ekonomicznym  $E$  ze skończoną liczbą podmiotów, jeden z towarów z przestrzeni  $\mathbf{R}^l$  jest towarem szkodliwym. Dla ustalenia uwagi i bez straty ogólności można przyjąć, że jest to jeden towar i jest to towar pierwszy. Mimo, że towar ten jest używany przez producentów w systemie ekonomicznym  $E$ , to konsumenci działający w tym systemie nie chcą by był on obecny w ich planach konsumpcji, a także nie chcą, by inne towary były produkowane z użyciem tego towaru oraz żeby był on wynikiem jakiegokolwiek planu produkcji.

Przestrzeń *eko-planów* nazywa się podprzestrzeń  $\mathbf{R}^l$  bez pierwszego dobra, czyli zbiór towarów

$$W = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_l, 0, \dots) \in \mathbf{R}^l : x_1 = 0\}. \quad (3.13)$$

Podmiot ekonomiczny  $k \in K$  nazywa się *eko-konsumentem* w okresie  $t$ , jeśli nie konsumuje on szkodliwego towaru w okresie  $t$ , tzn. jego zbiór konsumpcji  $X^k$  spełnia warunek

$$X^k \subset W. \quad (3.14)$$

Można rozważać sytuację, w której eko-konsumenci nie tylko nie chcą konsumować towarów uznanych za szkodliwe, ale również wymagają od producentów zaprzestania używania takich towarów w procesach produkcyjnych. Jeśli wszyscy konsumenci w okresie  $t$  eliminują konsumpcję koszyków towarów, które zawierają szkodliwy towar, to tym samym wymuszają zmianę w działalności producentów w okresie  $t'$ . Dzięki temu szkodliwy towar zostaje wyeliminowany z systemu produkcji w okresie  $t'$ , tzn. spełniony jest warunek

$$Y' \subset W. \quad (3.15)$$

Uzasadnione zatem jest modelowanie takiego mechanizmu ekonomicznego, w którym środowisko, czyli system ekonomiczny  $E$  spełnia warunek (3.14), a wyniki są obserwowane w takiej transformacji  $E'$ , w której spełniony jest warunek (3.15). Można udowodnić następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 3.2** *Jeśli  $E$  jest systemem ekonomicznym, w którym wszyscy konsumenci są eko-konsumentami, czyli dla każdego  $k$  spełniony jest warunek (3.14), to istnieje mechanizm hurwiczowski, który skutkuje taką transformacją  $E'$  systemu  $E$ , w której zachodzi warunek (3.15).*

*Dowód.* Analogicznie jak w przypadku Twierdzenia 3.1, dowód polega na określeniu odwzorowania  $Q: \mathbf{R}^l \rightarrow \mathbf{R}^l$ . Należy jednak doprecyzować postać odwzorowania  $Q$  tak, żeby spełniony był warunek (3.15). Niech  $g: \mathbf{R}^l \rightarrow \mathbf{R}$  będzie funkcją taką, że dla każdego  $y \in \mathbf{R}^l$  zachodzi  $g(y_1, \dots, y_l) = y_1$ . Wówczas istnieje wektor  $q \in \mathbf{R}^l$  o tej własności, że  $g(q) = 1$ . Niech  $Q(y) := y - g(y)q$ . Tak określone odwzorowanie  $Q: \mathbf{R}^l \rightarrow W$  jest projekcją w podprzestrzeń  $W$  (zob. Cheney 1966). Zatem  $Q(Y) \subset W$ , gdzie  $Q(Y)$  jest obrazem zbioru  $Y$  przez odwzorowanie  $Q$ . Stąd spełniony jest warunek (3.15). ■

Wektor  $-q \in \mathbf{R}^l$ , występujący w dowodzie Twierdzenia 3.2, można interpretować jako technologię pozwalającą na eliminację szkodliwego, pierwszego towaru z procesu produkcji (zob. Lipieta 2022). Można zauważyć, że zrealizowanie planu produkcji  $-q = (-1, -q_2, \dots, -q_l) \in \mathbf{R}^l$  wymaga zużycia jednej jednostki pierwszego, szkodliwego towaru. Zatem plan  $q \in \mathbf{R}^l$ , o ile jest realizowany łącznie z dowolnym wektorem  $y \in \mathbf{R}^l$  z intensywnością określoną przez liczbę  $g(y)$ , pozwala na wyeliminowanie pierwszego towaru z procesu produkcyjnego poprzez zastąpienie planu  $y$  planem  $y - g(y)q \in \mathbf{R}^l$ .

Twierdzenie 3.2 można uogólnić do sytuacji, w której  $k$  szkodliwych towarów, gdzie  $1 < k < l$ , ma być wyeliminowane z systemu ekonomicznego, w którym wszyscy konsumenci spełniają warunek (3.14) dla odpowiednio zdefiniowanej podprzestrzeni  $W$  określonej podobnie jak we wzorze (3.13).

Jeśli w systemie ekonomicznym  $E$  istnieje producent  $k \in K$ , który w okresie  $t$  realizuje plan produkcji  $y \in Y^k$ , a w okresie  $t'$  realizuje innowacyjny plan  $y' = Q(y) \notin Y$ , to mechanizm rozważany w Twierdzeniu 3.2 skutkuje technologiczną eko-innowacją, polegającą na wyeliminowaniu szkodliwego towaru z procesu produkcyjnego tego producenta. Plan  $y'$  nazywa się w takiej sytuacji **planem eko-innowacyjnym**, a opisany mechanizm nazywa się **mechanizmem eko-innowacyjnym** (Lipieta, Malawski 2021).

Niech  $v: 2^{\mathbf{R}^l} \rightarrow [0, +\infty)$  będzie funkcją różnorodności określoną przez konsumentów działających w systemie ekonomicznym  $E$ , a  $\lambda: 2^{\mathbf{R}^l} \rightarrow [0, +\infty)$  niech będzie funkcją ważącą atrybuty tych konsumentów (zob. Definicja 2.18). Zbiór eko-planów opisany formułą (3.13), można interpretować jako atrybut w przestrzeni towarów  $\mathbf{R}^l$ . Co więcej, jeśli przyjmuje się, że każdy konsument w systemie ekonomicznym  $E$  jest eko-konsumentem, to zbiór  $W \subset \mathbf{R}^l$  jest istotnym atrybutem, tzn.  $W \in \Lambda$ , gdzie  $\Lambda$  jest rodziną istotnych atrybutów opisaną formułą (2.24). Gdy w systemie ekonomicznym  $E$  wszystkie plany produkcji wymagają użycia szkodliwego towaru, to atrybut  $W$  nie jest realizowany w zbiorze planów produkcji  $Y$ , tzn. zachodzi warunek

$$W \cap Y = \emptyset. \quad (3.16)$$

**Spostrzeżenie 3.8** *Jeśli zbiór  $W$  określony formułą (3.13) jest atrybutem istotnym dla konsumentów w systemie ekonomicznym  $E$ , który nie jest realizowany w zbiorze planów produkcji  $Y$ , to zdefiniowany w dowodzie Twierdzenia 3.2 mechanizm hurwiczowski jest istotnie innowacyjny.*

*Dowód.* Należy pokazać, że w zbiorze  $Y'$  istnieje taki plan produkcji, dla którego zachodzi nie-

równość  $d(y', Y) > 0$ . Niech  $y' \in Y'$ . Z warunku (3.14) wynika, że  $y'$  posiada atrybut  $W$  (tzn.  $y' \in W$ ), a równocześnie wiadomo, że ten istotny atrybut nie jest realizowany w zbiorze  $Y$ , czyli  $W \cap Y = \emptyset$ . Zatem  $d(y', Y) = v(Y \cup \{y'\}) - v(Y) \geq \lambda_W > 0$ . ■

Z Wniosku 3.7 wiadomo, że hurwiczowski mechanizm  $v$ -twórczej destrukcji nie powoduje zmniejszenia różnorodności systemu ekonomicznego, a jeśli jest on dodatkowo mechanizmem istotnie innowacyjnym, to różnorodność systemu ekonomicznego się w jego wyniku zwiększa. Zatem również mechanizm eko-innowacyjny występujący w Spostrzeżeniu 3.8 może spowodować wzrost różnorodności systemu ekonomicznego, o ile tylko mechanizm ten zachowuje wszystkie istotne dla konsumentów atrybuty obecne w zbiorze  $Y$ .

**Wniosek 3.9** *Jeśli zachodzą założenia Spostrzeżenia 3.8 oraz mechanizm eko-innowacyjny zdefiniowany w dowodzie Twierdzenia 3.2 jest mechanizmem twórczej destrukcji, to w wyniku działania tak skonstruowanego eko-mechanizmu różnorodność systemu ekonomicznego rośnie.*

Oznacza to, że mechanizm eko-innowacyjny, który jest w swej istocie mechanizmem destrukcyjnym, może spowodować wzrost różnorodności systemu ekonomicznego.

### 3.3. Podsumowanie

Analiza wpływu zmiany ewolucyjnej, modelowanej jako transformacja systemu ekonomicznego, na różnorodność tego systemu, która została przeprowadzona w tym rozdziale, pozwoliła na częściowe zrealizowanie drugiego z podstawowych celów badań prowadzonych w ramach niniejszej rozprawy t.j. określenie wzajemnych zależności pomiędzy zmianami różnorodności systemu ekonomicznego a jego ewolucją. Dostarczyła ona również odpowiedzi na pierwsze z postawionych pytań badawczych. Dowodząc, w badanym modelu, prawdziwości Spostrzeżenia 3.1, wykazano równocześnie że wprowadzenie innowacji jest warunkiem koniecznym zwiększenia różnorodności analizowanego systemu ekonomicznego (zob. Wniosek 3.7).

Zmiany ewolucyjne zachodzące w systemie ekonomicznym pod wpływem innowacji wprowadzanych przez producentów mogą zwiększyć różnorodność systemu ekonomicznego, o ile wprowadzane rozwiązania posiadają nowe atrybuty, które są istotne z punktu widzenia operujących na rynku konsumentów. W toku badań stwierdzono, że wprowadzenie innowacji nie zawsze zwiększa różnorodność systemu ekonomicznego (por. Spostrzeżenie 3.4). Warunkiem



wystarczającym dla wzrostu różnorodności analizowanego systemu ekonomicznego, okazało się być wprowadzenie istotnej innowacji przy założeniu, że zachodząca transformacja jest  $v$ -twórczą destrukcją systemu produkcji.

Proces twórczej destrukcji, polegający na zanikaniu przestarzałych rozwiązań produkcyjnych w wyniku wprowadzania innowacji przez producentów okazał się możliwy do opisanie w języku różnorodności. Proces ten nie musi powodować zmniejszenia różnorodności systemu ekonomicznego, o ile istotne z punktu widzenia konsumentów atrybuty posiadane przez eliminowane rozwiązania produkcyjne są przejmowane przez wprowadzane innowacje. Konstruując przykład takiego mechanizmu destrukcyjnego, który prowadzi do zwiększenia różnorodności systemu ekonomicznego (zob. Wniosek 3.9) wykazano, że nie każda zmiana destrukcyjna zmniejsza różnorodność systemu ekonomicznego, co dowodzi, że hipoteza druga nie jest prawdziwa.

Modelowanie ewolucji gospodarki przy użyciu teorii mechanizmów pozwoliło na ukazanie złożoności zachodzących procesów oraz ich rezultatów w badanym systemie ekonomicznym. Okazało się, że dynamiczne mechanizmy hurwiczowskie, których wynikiem są zmiany innowacyjne zachodzące w rozważanym systemie ekonomicznym różnią się między sobą, nie tylko środowiskami ekonomicznymi, przestrzeniami informacji, czy zbiorem rezultatów, ale także swoim wpływem na różnorodność analizowanego systemu ekonomicznego.

Należy zauważyć, że wyniki zaprezentowane w tym rozdziale nie zależą od sposobu konstrukcji funkcji różnorodności w przestrzeni towarów i pozostają prawdziwe dla każdej funkcji, która spełnia Definicję 2.15.



## Rozdział 4

# Różnorodność w modelu gry schumpeterowskiej

Model przedstawiony w rozdziałach 2 i 3 umożliwił zbadanie wpływu zmian ewolucyjnych, w tym wprowadzanych innowacji, na różnorodność systemu ekonomicznego, w którym działa skończona liczba podmiotów. Nasuwa się naturalne pytanie dualne: Jak zmiana różnorodności systemu gospodarczego wpływa na jego ewolucję? Jest to równocześnie drugie z pytań badawczych postawionych w niniejszej rozprawie. Próba odpowiedzi na to pytanie wiąże się z weryfikacją ostatniej z hipotez badawczych, która stwierdza, że przyrost różnorodności w systemie ekonomicznym spowodowany wprowadzeniem innowacji ma wpływ na skłonność producentów do podjęcia działalności innowacyjnej. Do weryfikacji tej hipotezy wykorzystane zostaną narzędzia teorii gier, która pozwala na uwzględnienie motywacji kierujących producentami wprowadzającymi innowacje. Stąd też, model ewolucji schumpeterowskiej przedstawiony w niniejszym rozdziale różni się od modelu analizowanego w rozdziałach 2 i 3, bazując na podejściu charakterystycznym dla ewolucyjnej teorii gier, a mianowicie analizowane w systemie ekonomicznym zmiany zachodzą w czasie ciągłym i dotyczą nieprzeliczalnej populacji podmiotów.

Twórcami teorii gier byli John von Neumann oraz Oskar Morgenstern (1944), którzy postawili sobie za cel stworzenie matematycznej teorii opisującej ludzkie zachowania w sytuacjach wymagających podejmowania strategicznych decyzji. W teorii gier bada się zachowania graczy, z których każdy optymalizuje rezultat gry (maksymalizuje swoją wypłatę), warunkując swoje działania zachowaniami innych graczy. Narzędzia teorii gier, pierwotnie skonstruowane dla celów badań ekonomicznych, znalazły swoje zastosowanie również w innych dziedzinach nauki. Pracą wyznaczającą nowe kierunki zastosowań teorii gier, był opublikowany w *Nature*

w 1973 r. artykuł Johna Mayarda Smitha i George'a Price'a pt. „The Logic of Animal Conflict” (Smith, Price 1973). Ewolucyjna teoria gier, której prekursorami obok Smitha i Price'a byli Peter Taylor, Josef Hofbauer oraz Karl Sigmund, pozwala odejść od założenia o racjonalności graczy, wymaga jednak zazwyczaj istnienia dużej populacji, której jednostki wchodzi ze sobą w interakcje. Rozważając ewolucję populacji najczęściej zakłada się, że każda jej jednostka ma ustaloną strategię i wchodzi w interakcje z innymi jednostkami losowo (tzw. model *symmetric random matching*). Wpłata z danej strategii zależy od stanu populacji, czyli od tego jaki odsetek graczy używa każdej ze strategii. Zazwyczaj te strategie, które uzyskują wyższe wypłaty, jako korzystniejsze, rozprzestrzeniają się w populacji, natomiast strategie, które radzą sobie gorzej są używane rzadziej.

W niniejszym rozdziale rozważa się system ekonomiczny, w którym przedsiębiorstwa konkurują ze sobą używając strategii, z których każda jest związana z wyborem planu produkcji o określonych cechach. Każde przedsiębiorstwo może wybrać do realizacji znany plan produkcji, czyli użyć strategii polegającej na imitacji. Zamiast tego, firma może zdecydować się na wprowadzenie innowacji, która w istotny sposób różni się od znanych planów produkcji. Wpłata producenta używającego konkretnej strategii: imitacyjnej albo innowacyjnej, zależy od stanu populacji przedsiębiorstw, czyli od tego jaki odsetek populacji stanowią producenci stosujący daną strategię. W populacji składającej się z samych imitatorów, wprowadzenie istotnej innowacji będzie się wiązać z wysoką wypłatą. Jeśli jednak wielu producentów zdecyduje się na wprowadzanie innowacji, to zysk innowatora może nie przewyższać poniesionych przez niego kosztów. Okazuje się, że tak zdefiniowana gra populacyjna gwarantuje w pewnych warunkach powstanie stabilnej struktury w populacji producentów, w której konkurują ze sobą innowatorzy i imitatorzy. Odzwierciedla to kluczową cechę rozwoju gospodarczego opisywanego przez Schumpetera (1934).

W pierwszej części niniejszego rozdziału przedstawiono podstawowe narzędzia ewolucyjnej teorii gier. Następnie opisano system ekonomiczny, w którym działają producenci podejmujący decyzje o wprowadzaniu innowacji oraz zaproponowano grę populacyjną modelującą tak rozumianą konkurencję schumpeterowską. Analiza modelu składa się na ostatnią część rozdziału.

## 4.1. Podstawowe pojęcia ewolucyjnej teorii gier

Zdefiniowanie gry wymaga określenia zbioru graczy, czyli ustalenia kto rozgrywa daną grę, przy czym zbiór graczy może być skończony lub nie. Konieczne jest też określenie możliwych strategii dla każdego gracza, czyli ustalenia jakie działania może on podjąć w grze. Przyjmuje się ponadto, że każde działanie gracza niesie ze sobą określone konsekwencje, wyrażone liczbowo jako wypłata z wybranej przez gracza strategii.

Ewolucyjna teoria gier zakłada zazwyczaj istnienie dużego zbioru graczy, który określa się mianem populacji. Przyjmuje się, że nieprzeliczalną **populację** graczy  $\mathcal{B}$  utożsamia się z przedziałem jednostkowym  $[0, 1]$  (zob. np. Hadikhanloo et al. 2022) wyposażonym w miarę Lebesgue'a  $\mu$  (zob. np. Łojasiewicz 1976). Niech funkcja mierzalna  $\chi: \mathcal{B} \rightarrow S$  określa wybór strategii ze zbioru  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ . Wówczas dla ustalonej strategii  $s_i \in S$  zbiór

$$\chi^{-1}(s_i) := \{b \in \mathcal{B} : \chi(b) = s_i\},$$

stanowi podzbiór tych graczy w populacji  $\mathcal{B}$ , którzy używają strategii  $s_i \in S$ . Miarę zbioru  $\chi^{-1}(s_i)$  nazywa się **odsetkiem** graczy w populacji  $\mathcal{B}$  stosujących strategię  $s_i \in S$ .

**Definicja 4.1** *Stanem populacji nazywa się wektor postaci  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , gdzie  $x_i \in [0, 1]$  oznacza odsetek graczy w populacji stosujących strategię  $s_i \in S$ , tzn.  $x_i \geq 0$  i  $\sum_{s_i \in S} x_i = 1$ .*

Zbiór wszystkich możliwych stanów populacji stanowi sympleks

$$\Delta(S) := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1\}.$$

**Definicja 4.2** *Jeśli w stanie  $x \in \Delta(S)$  wszyscy członkowie populacji stosują wyłącznie jedną strategię, tzn.  $x_i = 1$  dla pewnego  $i \in S$ , a co za tym idzie  $x_j = 0$  dla każdego  $j \neq i$ , to populację w stanie  $x$  nazywa się **monomorficzną**. Populację, która nie jest monomorficzna nazywa się **polimorficzną**.*

Niech dana będzie rodzina funkcji ciągłych  $\pi_i: \Delta(S) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Wartość  $\pi_i(x)$  nazywa się **wypłatą gracza stosującego  $i$ -tą strategię** w stanie populacji  $x \in \Delta(S)$ . Ze względu na to, że każdy gracz w populacji  $\mathcal{B}$ , który w stanie  $x \in \Delta(S)$  stosuje strategię  $s_i$  uzyskuje taką samą wypłatę wynoszącą  $\pi_i(x)$ , wartość tę nazywa się również **wypłatą ze strategii  $s_i \in S$** .

**Definicja 4.3** *Funkcją wypłaty nazywa się odwzorowanie  $\pi: \Delta(S) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , które każdemu stanowi populacji  $x \in \Delta(S)$  przypisuje odpowiadający mu wektor wypłat z poszczególnych strategii  $\pi(x) := (\pi_1(x), \dots, \pi_n(x)) \in \mathbb{R}^n$ .*

**Definicja 4.4** *Grą populacyjną nazywa się parę  $\mathcal{G} := \mathcal{G}(S, \pi)$ , gdzie  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  jest zbiorem strategii, a  $\pi: \Delta(S) \rightarrow \mathbb{R}^n$  stanowi funkcję wypłaty.*

Tak zdefiniowana gra populacyjna jest tzw. grą bezatomową, co oznacza, że zmiana zachowania przez mały zbiór graczy w populacji, tzn. zbiór graczy, który ma miarę zero, nie wpływa na przebieg gry (por. Hadikhanloo et al. 2022). Dodatkowo, gracze w grze są anonimowi, tzn. wypłaty każdego gracza zależą od stanu populacji jako całości, a nie od tego, którzy gracze wybierają dane strategie.

Gra populacyjna dopuszcza różne interpretacje interakcji zachodzących pomiędzy graczami. Zazwyczaj przyjmuje się, że każda jednostka w populacji używa w danym momencie jednej strategii ze zbioru  $S$  (tzw. strategii czystej). Wówczas wektor  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Delta(S)$  jest *stanem populacji*, którego współrzędna  $x_i \in [0, 1]$  stanowi odsetek graczy wybierających strategię  $s_i \in S$ . Możliwa jest też alternatywna interpretacja (por. np. Webb 2007), w której przyjmuje się, że każda jednostka w populacji stosuje strategię ze zbioru  $S$  zgodnie z pewnym rozkładem prawdopodobieństwa. Wówczas wektor  $(x_1, \dots, x_n) \in \Delta(S)$  stanowi tzw. *strategię mieszaną*, której współrzędna  $x_i$  określa prawdopodobieństwo użycia strategii  $s_i \in S$  przez każdego gracza w populacji. Ze względu na prezentowany kontekst ekonomiczny, jak również klarowność wyводу, w tym rozdziale przyjmuje się pierwszą z wymienionych perspektyw.

Jednym z najważniejszych pojęć teorii gier jest pojęcie równowagi Nasha.

**Definicja 4.5 (Sandholm 2010a)** *Stan populacji  $x \in \Delta(S)$  nazywa się **równowagą Nasha** gry populacyjnej  $\mathcal{G}$ , jeśli każda używana w tym stanie strategia zapewnia maksymalną wypłatę, tzn. dla dowolnego  $s_i \in S$  zachodzi implikacja:*

$$\text{jeśli } x_i > 0, \text{ to } \pi_i(x) = \max_{s_j \in S} \pi_j(x). \quad (4.1)$$

*Równoważnie, każdy gracz w populacji wybiera strategię optymalną wobec wyborów wszystkich graczy.*

**Twierdzenie 4.1 (Sandholm 2010b)** *W każdej grze populacyjnej istnieje co najmniej jedna równowaga Nasha.*

**Średnią wypłatą** w grze populacyjnej  $\mathcal{G}$  w stanie  $x \in \Delta(S)$  nazywa się wartość

$$\pi_{av}(x) = \sum_{i=1}^n x_i \pi_i(x). \quad (4.2)$$

Średnia wypłata może stanowić punkt odniesienia dla oceny jakości strategii używanej przez graczy. Gracz może być zmotywowany do używania takiej strategii, która gwarantuje wypłatę przekraczającą wartość (4.2). Co więcej wielkość ta może służyć jako utylitarystyczna miara dobrobytu społecznego w populacji.

#### 4.1.1. Struktura gry populacyjnej

Gry populacyjne konstruuje się najczęściej przyjmując tzw. scenariusz ewolucyjny (zob. Płatkowski 2012). Zakłada się w nim, że gracze z nieprzeliczalnej populacji  $\mathcal{B}$  są losowo łączeni w pary, w których rozgrywają symetryczną grę dwuosobową.

##### Symetryczna gra dwuosobowa

Niech  $K = \{k_1, k_2\} \subset \mathcal{B}$  będzie 2-elementowym zbiorem graczy. Gracza  $k_1$  nazywa się pierwszym, a gracza  $k_2$  – drugim graczem. Niech  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  będzie zbiorem strategii każdego z graczy.

**Definicja 4.6** *Profillem strategii nazywa się parę  $(s_i, s_j) \in S \times S$ , gdzie  $s_i, s_j \in S$  są ustalonymi strategiami, odpowiednio – pierwszego i drugiego gracza.*

Niech  $f: S \times S \rightarrow \mathbb{R}$  przypisuje dowolnemu profilowi strategii  $(s_i, s_j) \in S \times S$  wartość wypłaty pierwszego gracza.

**Definicja 4.7** *Symetryczną grą dwuosobową nazywa się parę  $G_2 := G_2(S, f)$ , gdzie  $K = \{k_1, k_2\} \subset \mathcal{B}$  jest dwuelementowym zbiorem graczy,  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  jest zbiorem strategii obu graczy, a wartości funkcji  $f: S \times S \rightarrow \mathbb{R}$ , która każdemu profilowi strategii  $(s_i, s_j) \in S \times S$  przypisuje wypłatę pierwszego gracza, są zadane przez wyrazy macierzy  $M = M_{n \times n}$  następująco:*

$$f(s_i, s_j) = M_{ij}, \quad (4.3)$$

gdzie  $i, j = 1, \dots, n$ .

W symetrycznej grze dwuosobowej wypłaty drugiego gracza określone są przez wyrazy macierzy  $M^T$ , powstałej przez transponowanie macierzy  $M$ .

### Scenariusz ewolucyjny

Przyjmuje się, że w populacji  $\mathcal{B}$  wielokrotnie powtarza się następujący schemat:

- każdy z graczy używa określonej wybranej strategii ze zbioru  $S$ ,
- gracze losowo łączą się w pary, w których rozgrywają jednorazowo tę samą dwuosobową grę symetryczną  $G_2(S, f)$ ,
- każdy z graczy otrzymuje wypłatę zgodnie z macierzą wypłat  $M_{n \times n}$  gry dwuosobowej  $G_2(S, f)$ .

W grze populacyjnej  $\mathcal{G}$  rozgrywanej według powyższego scenariusza, wypłata z każdej strategii zależy od stanu populacji, stąd konieczność spojrzenia na oczekiwane wypłaty graczy. Oczekiwana wypłata gracza, który stosuje strategię  $s_i \in S$ , gdy jego przeciwnik jest członkiem populacji, która znajduje się w stanie  $x \in \Delta(S)$  wynosi:

$$Ef(s_i, x) = \sum_{j=1}^n f(s_i, s_j) x_j, \quad (4.4)$$

natomiast całkowita oczekiwana wypłata graczy w populacji w stanie  $\bar{x} \in \Delta(S)$  przeciw populacji w stanie  $x \in \Delta(S)$  jest równa:

$$Ef(\bar{x}, x) = \bar{x} M x^T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{x}_i f(s_i, s_j) x_j. \quad (4.5)$$

Przyjmuje się, że wypłata ze strategii  $s_i \in S$  w stanie populacji  $x \in \Delta(S)$  jest dana wzorem:

$$\pi_i(x) := Ef(s_i, x). \quad (4.6)$$

Funkcję wypłaty  $\pi: \Delta(S) \rightarrow \mathbb{R}^n$  określa wektor wypłat, który w stanie  $x \in \Delta(S)$  jest zadany przez

$$\pi(x) = M x^T. \quad (4.7)$$



Tak zdefiniowaną grę populacyjną  $\mathcal{G}$  nazywa się grą typu *symmetric random matching* (Weibull 1995; Sigmund 1998; Sandholm 2010b). W niniejszej rozprawie rozważa się wyłącznie gry populacyjne tego typu, nazywając je krótko **grami populacyjnymi**. Symetryczną grę dwuosobową  $G_2(S, f)$  rozgrywaną w populacji  $\mathcal{B}$  według scenariusza ewolucyjnego nazywa się **grą dwuosobową skojarzoną z grą populacyjną  $\mathcal{G}$** . Macierz  $M$ , której współczynniki określają wypłaty pierwszego z graczy, nazywa się **macierzą wypłat gry populacyjnej**.

### Ewolucyjnie stabilny stan populacji

Niech  $\mathcal{G}$  będzie grą populacyjną, a  $G_2(S, f)$  skojarzoną z nią grą dwuosobową. Niech  $x^*, x \in \Delta(S)$  i  $x^* \neq x$ , tzn. w stanie  $x$  pewnej strategii używa inny odsetek graczy niż w stanie  $x^*$ .

**Definicja 4.8 (Thomas 1984)** (por. Sandholm 2010c) *Stan populacji  $x^* \in \Delta(S)$  nazywa się ewolucyjnie stabilnym, jeśli dla każdego stanu populacji  $x \in \Delta(S)$ , gdzie  $x \neq x^*$ , istnieje  $\bar{\epsilon}$  takie, że dla każdego  $0 < \epsilon < \bar{\epsilon}$  i dla każdego stanu populacji  $x_\epsilon = (1 - \epsilon)x^* + \epsilon x$  zachodzi nierówność:*

$$Ef(x, x_\epsilon) < Ef(x^*, x_\epsilon).$$

Stan populacji jest ewolucyjnie stabilny, jeśli populacja powraca do niego po zaistnieniu niewielkiej zmiany. Stan taki nazywa się czasem stanem odpornym na mutację. Wówczas tę część populacji  $x_\epsilon$ , która znajduje się w stanie  $x$  określa się jako podpopulację „mutantów”, a wartość  $\bar{\epsilon}$  nazywa się barierą inwazyjną; po jej przekroczeniu odsetek „mutantów” może przetrwać w populacji  $\mathcal{B}$ .

**Spostrzeżenie 4.1 (Sandholm 2010b (Proposition 8.3.4))** *Ewolucyjnie stabilny stan populacji stanowi równowagę Nasha gry populacyjnej.*

**Twierdzenie 4.2 (Webb 2007 (Theorem 8.14))** *Stan populacji  $x^* \in \Delta(S)$  jest ewolucyjnie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą oba poniższe warunki:*

- 1)  $Ef(x^*, x^*) \geq Ef(x, x^*)$  dla każdego  $x \in \Delta(S)$ ;
- 2) dla każdego  $x \in \Delta(S)$ , jeśli  $Ef(x^*, x^*) = Ef(x, x^*)$  i  $x \neq x^*$ , to  $Ef(x^*, x) > Ef(x, x)$ .

## Mikroekonomiczne podstawy ewolucyjnej teorii gier

Ewolucyjna teoria gier została zaproponowana w celu modelowania ewolucji zachodzącej w populacjach biologicznych. Przyjmowano przy tym, że strategia każdego gracza jest mu przypisana na podstawie jego przynależności gatunkowej lub cech osobniczych (genetycznych), czyli gracz ma zakodowaną strategię, której używa. Takie założenie nie znajduje uzasadnienia w przypadku modeli ekonomicznych, ponieważ podmioty gospodarcze mogą świadomie decydować o używaniu określonej strategii. Dlatego w latach dziewięćdziesiątych XX. wieku stworzono ekonomiczne podstawy ewolucyjnej teorii gier, oparte o tzw. protokoły postępowania (*revision protocols*) (zob. np. Helbing 1992; Schlag 1994; 1998; Hofbauer, Sigmund 2003; Sandholm 2005; 2010b; Falniowski, Mertikopoulos 2024).

Formalnie, protokół postępowania jest przyporządkowaniem:  $\rho: \mathbb{R}^n \times \Delta(S) \rightarrow \mathbb{R}_+^{2n}$ , które definiuje sposób podejmowania decyzji o zmianie strategii przez graczy w danej populacji. Przyjmuje się, że w toku gry, jej losowo wybrani uczestnicy uzyskują możliwość zmiany używanej przez siebie strategii na inną, przy czym wylosowany gracz zamienia używaną przez siebie strategię  $s_i \in S$  na inną strategię  $s_j \in S$  z prawdopodobieństwem proporcjonalnym do wartości  $\rho_{ij}(\pi(x), x)$  (*conditional switch rate*), która zależy od stanu populacji  $x$  oraz wektora wypłat  $\pi(x)$ . Jeśli w danej populacji jest używany protokół postępowania  $\rho$ , to dynamikę populacji określa zmiana odsetka graczy, którzy używają danej strategii  $s_i \in S$  opisana równaniem różniczkowym (*mean dynamics*) postaci (Hofbauer, Sandholm 2009):

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j \neq i} x_j(t) \rho_{ji}(\pi(x(t)), x(t)) - x_i(t) \sum_{j \neq i} \rho_{ij}(\pi(x(t)), x(t)), \quad (4.8)$$

gdzie pierwsza suma wyznacza odsetek graczy, którzy w chwili  $t$  zmieniają strategię z dowolnej innej na  $s_i$ , czyli napływ graczy (*inflow*) do strategii  $s_i$ , natomiast odsetek graczy, którzy w chwili  $t$  zmieniają strategię z  $s_i$  na dowolną inną, czyli odpływ graczy (*outflow*) ze strategii  $s_i$  określa wyrażenie  $x_i(t) \sum_{j \neq i} \rho_{ij}(\pi(x(t)), x(t))$ .

Okazuje się, że fundamentalne dynamiki ewolucyjnej teorii gier można otrzymać poprzez naturalne wybory protokołów postępowania opisane poniżej.

- Jeśli gracz porównuje używaną przez siebie strategię  $s_i \in S$  ze strategią  $s_j \in S$ , która jest używana przez niezerowy odsetek graczy i zmienia swoją strategię proporcjonalnie do

korzyści płynącej z takiej zmiany (tzw. *pairwise proportional imitation*) (Schlag 1998), to

$$\rho_{ij}(\pi(x), x) = x_j[\pi_j(x) - \pi_i(x)]_+, \quad (4.9)$$

gdzie  $[m]_+ := \max\{m, 0\}$ , dla  $m \in \mathbb{R}$ . Równanie (4.8) prowadzi do prawdopodobnie najbardziej znanej i najczęściej badanej dynamiki ewolucyjnej teorii gier, czyli dynamiki replikatorowej Taylora i Jonkera (1978) postaci:

$$\dot{x}_i(t) = x_i(\pi_i(x) - \pi_{av}(x)), \quad (4.10)$$

gdzie  $\pi_{av}(x)$  jest średnią wypłatą w populacji w stanie  $x$ , określoną wzorem (4.2).

- Gdy gracz porównuje swój wybór strategii  $s_j \in S$  ze średnią wypłatą w populacji:

$$\rho_{ij}(\pi(x), x) = [\pi_j(x) - \pi_{av}(x)]_+, \quad (4.11)$$

to formuła (4.8) prowadzi do równania dynamiki Browna-von Neumanna-Nasha (zob. Brown, von Neumann 1950), w której

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j \neq i} x_j(t)[\pi_i(x) - \pi_{av}(x)]_+ - x_i(t) \sum_{j \neq i} [\pi_j(x) - \pi_{av}(x)]_+. \quad (4.12)$$

- Jeżeli gracz porównuje wypłaty: z używanej przez siebie strategii  $s_i$  i dowolnej możliwej strategii  $s_j \in S$ , czyli

$$\rho_{ij}(\pi(x), x) = [\pi_j(x) - \pi_i(x)]_+, \quad (4.13)$$

to wówczas równanie (4.8) definiuje dynamikę Smitha (Smith 1984):

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j \neq i} x_j(t)[\pi_i(x) - \pi_j(x)]_+ - x_i(t) \sum_{j \neq i} [\pi_j(x) - \pi_i(x)]_+. \quad (4.14)$$

Szczególne znaczenie przy analizowaniu dynamiki ma określenie jej punktów stałych, czyli stanów stacjonarnych populacji.

**Definicja 4.9** *Stanem stacjonarnym populacji* nazywa się taki stan  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Delta(S)$ , który jest punktem stałym dynamiki określonej wzorem (4.8), co oznacza, że  $\dot{x}_i(t) = 0$  dla każ-

dego  $i = 1, \dots, n$ .

Gdy populacja znajduje się w stanie stacjonarnym, to różnica pomiędzy napływem a odpływem graczy w przypadku każdej ze strategii wynosi 0, a odsetek graczy używających każdej ze strategii pozostaje stały.

**Uwaga 4.1** *Jeśli stan populacji  $x \in \Delta(S)$  jest równowagą Nasha gry populacyjnej, to  $x$  jest stanem stacjonarnym dynamiki określonej równaniem (4.8) (zob. Sandholm 2010b).*

### 4.1.2. Gry populacyjne o dwóch strategiach

Zmiany zachodzące w populacji producentów, które będą analizowane w dalszej części rozprawy, są związane z możliwością wyboru przez każdego producenta jednej z dwóch możliwych strategii. W związku z tym, poniżej zebrano najistotniejsze fakty, dotyczące gier populacyjnych typu *symmetric random matching*, w których zbiór strategii jest dwuelementowy.

Jeśli  $S = \{s_1, s_2\}$  jest zbiorem strategii graczy z populacji  $\mathcal{B}$ , to każdy stan populacji jest postaci  $x = (x_1, x_2)$ , gdzie  $x_1$  oznacza odsetek populacji stosujący strategię  $s_1$ , natomiast  $x_2 = 1 - x_1$  jest odsetkiem populacji stosującym strategię  $s_2$ . Zbiór możliwych stanów populacji wyznacza sympleks  $\Delta(S) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 : x_1 + x_2 = 1\}$ , który można utożsamić z odcinkiem  $[0, 1]$ . Wierzchołki sympleksu  $\Delta(S)$ , czyli wektory:  $(1, 0)$  oraz  $(0, 1)$ , reprezentują monomorficzne stany populacji, w których używana jest wyłącznie jedna z dwóch dostępnych strategii.

Niech  $\mathcal{G}$  będzie grą populacyjną o zbiorze strategii  $S = \{s_1, s_2\}$  i macierzy wypłat postaci:

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

gdzie  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  oraz  $a - c \neq b - d$ . Alternatywnie do wzoru (4.15) stosuje się przedstawienie macierzy wypłat  $M$  w postaci przedstawionej w Tabeli 4.1.

|         |       |         |        |
|---------|-------|---------|--------|
|         |       | Gracz 2 |        |
|         |       | $s_1$   | $s_2$  |
| Gracz 1 | $s_1$ | $a, a$  | $b, c$ |
|         | $s_2$ | $c, b$  | $d, d$ |

Tabela 4.1: Macierz wypłat symetrycznej gry dwuosobowej

Wówczas w stanie  $x = (x_1, 1 - x_1) \in \Delta(S)$ :

- wypłata ze strategii  $s_1$  wynosi:

$$\pi_1(x) = ax_1 + b(1 - x_1); \quad (4.16)$$

- wypłata ze strategii  $s_2$  jest równa:

$$\pi_2(x) = cx_1 + d(1 - x_1); \quad (4.17)$$

- średnia wypłata wynosi:

$$\pi_{av}(x) = x_1^2(a - c + d - b) + x_1(b - 2d + c) + d. \quad (4.18)$$

### **Ewolucyjnie stabilny stan populacji w grze populacyjnej o dwóch strategiach**

W przypadku dowolnej gry populacyjnej ewolucyjnie stabilny stan populacji nie musi istnieć. Wiadomo jednak, że każdy stan ewolucyjnie stabilny jest równowagą Nasha (zob. 4.1) i że każda gra populacyjna posiada równowagę Nasha (zob. Twierdzenie 4.1). W grze populacyjnej o dwóch strategiach ewolucyjnie stabilne mogą być zarówno monomorficzne stany populacji:  $x_{s_1} = (1, 0)$  lub  $x_{s_2} = (0, 1)$ , jak i stan  $x^* = (x_1^*, 1 - x_1^*)$ , w którym populacja jest polimorficzna, tzn. odsetek graczy równy  $x_1^* > 0$  używa strategii  $s_1$ , natomiast odsetek wynoszący  $1 - x_1^* > 0$ , stosuje strategię  $s_2$ .

Jeśli polimorficzny stan populacji  $x^* = (x_1^*, 1 - x_1^*) \in \Delta(S)$  jest ewolucyjnie stabilny, to na podstawie Spostrzeżenia 4.1 stanowi on równowagę Nasha gry  $\mathcal{G}$ . W tym stanie populacji używane są obie strategie, tzn.  $x_1^* > 0$  oraz  $x_2^* > 0$ , zatem z Definicji 4.5 zachodzi równość:

$$\pi_1(x^*) = \pi_2(x^*). \quad (4.19)$$

Wypłata z użycia strategii  $s_1$  przeciwko populacji w stanie  $x^*$  wynosi

$$\pi_1(x^*) = ax_1^* + b(1 - x_1^*), \quad (4.20)$$

natomiast oczekiwana wypłata z zastosowania strategii  $s_2$  jest równa

$$\pi_2(x^*) = cx_1^* + d(1 - x_1^*). \quad (4.21)$$

Z równań (4.19), (4.20) oraz (4.21) otrzymuje się możliwą postać odsetka graczy używającego każdej ze strategii w stanie ewolucyjnie stabilnym, tzn.:

$$x_1^* = \frac{d - b}{a - c + d - b},$$

$$x_2^* = 1 - x_1^* = \frac{a - c}{a - c + d - b}.$$

Wielkości  $x_1^*$  oraz  $x_2^* = 1 - x_1^*$  reprezentują dodatni odsetek populacji, należy zatem sprawdzić kiedy  $x_1^* \in (0, 1)$ . Z warunku

$$0 < \frac{d - b}{a - c + d - b} < 1 \quad (4.22)$$

wynika, że wyrażenia  $a - c$  oraz  $d - b$  muszą być tych samych znaków, tzn.

$$(a - c)(d - b) > 0. \quad (4.23)$$

Można zatem sformułować następujące spostrzeżenie zadające warunek konieczny, by w grze populacyjnej o dwóch strategiach istniał stabilny stan populacji, w którym używane są obie możliwe strategie (stan polimorficzny).

**Spostrzeżenie 4.2** *Jeśli w grze populacyjnej  $\mathcal{G}$  o dwóch strategiach polimorficzny stan populacji jest ewolucyjnie stabilny, to zachodzi warunek (4.23).*

**Wniosek 4.1** *W grze populacyjnej o dwóch strategiach istnieje co najwyżej jeden polimorficzny stan populacji, który jest ewolucyjnie stabilny. Ma on postać  $x^* = (x_1^*, 1 - x_1^*) \in \Delta(S)$ , gdzie odsetek graczy używających strategii  $s_1$  jest równy*

$$x_1^* = \frac{d - b}{a - c + d - b}, \quad (4.24)$$

*a odsetek graczy stosujących strategię  $s_2$  wynosi*

$$x_2^* = \frac{a - c}{a - c + d - b}. \quad (4.25)$$

Warunkiem koniecznym istnienia ewolucyjnie stabilnego stanu populacji z dwiema możliwymi strategiami czystymi, który gwarantuje jej polimorficzność, jest zatem prosty zestaw zależności pomiędzy parametrami gry dwuosobowej określony wzorem (4.23). Zarówno wartość wyrażenia  $a - c$  jak i wartość  $d - b$  wyrażają różnice w wypłatach, wynikające ze zmiany strategii z tej samej, na przeciwną do strategii używanej przez oponenta. Jeśli warunek (4.23) nie jest spełniony, to w grze populacyjnej o dwóch strategiach nie istnieje taki polimorficzny stan populacji, który byłby równocześnie ewolucyjnie stabilny.

Konsekwencją Twierdzenia 4.2 oraz przyjętego założenia o parametrach gry (tzn.  $a - c \neq b - d$ ) jest następujące stwierdzenie.

**Spostrzeżenie 4.3** *Niech  $G$  będzie grą populacyjną o dwóch strategiach ze zbioru  $S = \{s_1, s_2\}$  i macierzy wypłat określonej formułą (4.15).*

- *Monomorficzny stan populacji  $x_{s_1} = (1, 0) \in \Delta(S)$  jest stanem ewolucyjnie stabilnym wtedy i tylko wtedy, gdy  $a > c$  lub równocześnie:  $a = c$  i  $d < b$ .*
- *Monomorficzny stan populacji  $x_{s_2} = (0, 1) \in \Delta(S)$  jest stanem ewolucyjnie stabilnym wtedy i tylko wtedy, gdy  $d > b$  lub równocześnie:  $d = b$  i  $a < c$ .*

Zatem istnienie monomorficznej populacji jest jednym z możliwych stabilnych rozwiązań gry populacyjnej o dwóch strategiach. Spostrzeżenie 4.3 można uzupełnić o pozostałe przypadki zależności zachodzących pomiędzy parametrami  $a$  i  $c$  oraz  $b$  i  $d$ . Jeśli spełniony jest warunek (4.23), to w zależności od tego czy różnice:  $a - c$  oraz  $d - b$ , są równocześnie dodatnie, czy równocześnie ujemne, otrzymuje się różne rezultaty gry.

**Spostrzeżenie 4.4** *Niech  $G$  będzie grą populacyjną o dwóch strategiach ze zbioru  $S = \{s_1, s_2\}$  i macierzy wypłat określonej formułą (4.15), której współczynniki spełniają warunek (4.23).*

1. *Jeśli  $a > c$  i  $d > b$ , to ewolucyjnie stabilne są oba monomorficzne stany populacji:  $x_{s_1} = (1, 0)$  i  $x_{s_2} = (0, 1)$ .*
2. *Jeśli  $a < c$  i  $d < b$ , to jedynym stanem ewolucyjnie stabilnym jest polimorficzny stan populacji postaci  $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ , gdzie  $x_1^*$  oraz  $x_2^*$  są dane wzorami: (4.24) oraz (4.25) odpowiednio.*

*Dowód.* Punkt pierwszy jest konsekwencją Spostrzeżenia 4.3. Dowód punktu drugiego opiera się na Twierdzeniu 4.2. Wzór (4.5) w grze populacyjnej o dwóch strategiach dla  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2), (x_1, x_2) \in \Delta(S)$  przyjmuje formę:

$$Ef(\bar{x}, x) = a\bar{x}_1x_1 + b\bar{x}_1x_2 + cx_1\bar{x}_2 + d\bar{x}_2x_2. \quad (4.26)$$

Niech  $a < c$  i  $d < b$  oraz  $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ , gdzie  $x_1^*$  jest dane wzorem (4.24), a  $x_2^* = 1 - x_1^*$ . Można zauważyć, że wówczas dla każdego  $x = (x_1, x_2) \in \Delta(S)$  zachodzi równość:  $Ef(x^*, x^*) = Ef(x, x^*)$  (por. Twierdzenie 4.2 punkt 1). Ze wzoru (4.26) otrzymuje się:

$$Ef(x^*, x) = x_1[x_1^*a + (1 - x_1^*)c] + (1 - x_1)[(x_1^*b + (1 - x_1^*)d)] \quad (4.27)$$

oraz

$$Ef(x, x) = x_1[x_1a + (1 - x_1)c] + (1 - x_1)[(x_1b + (1 - x_1)d)]. \quad (4.28)$$

Odejmując stronami równania (4.27) oraz (4.28) dostaje się równanie:

$$Ef(x^*, x) - Ef(x, x) = (x_1^* - x_1)[x_1(d - b + a - c) - (d - b)],$$

które po podstawieniu  $x_1^*$  ze wzoru (4.24) przyjmuje postać:

$$Ef(x^*, x) - Ef(x, x) = -(x_1^* - x_1)^2(d - b + a - c).$$

Skoro  $a < c$  i  $d < b$ , to  $d - b + a - c < 0$ . Zatem  $Ef(x^*, x) - Ef(x, x) > 0$ , stąd na mocy Twierdzenia 4.2, polimorficzny stan  $x^*$  jest ewolucyjnie stabilny. ■

**Wniosek 4.2** *W grze populacyjnej o dwóch strategiach zawsze istnieje ewolucyjnie stabilny stan populacji.*

Punkt 2 Spostrzeżenia 4.4 podaje warunek wystarczający istnienia polimorficznego stanu ewolucyjnie stabilnego gry populacyjnej o dwóch strategiach. Na jego podstawie oraz dzięki Spostrzeżeniu 4.2 otrzymuje się następujący wniosek.

**Wniosek 4.3** *Gra populacyjna o dwóch strategiach posiada polimorficzny ewolucyjnie stabilny stan populacji wtedy i tylko wtedy, gdy wypłaty zadane przez macierz (4.15) spełniają układ*



zależności:  $a < c$  i  $b > d$ . Stan ten ma postać:

$$x^* = (x_1^*, x_2^*) = \left( \frac{d - b}{a - c + d - b}, \frac{a - c}{a - c + d - b} \right). \quad (4.29)$$

Ze Spostrzeżenia 4.4 i Wniosku 4.2 wynika, że określenie ewolucyjnie stabilnego polimorficznego rozwiązania gry populacyjnej o dwóch strategiach może sprowadzać się do wyznaczenia jedynej istniejącej równowagi Nasha takiej gry.

**Wniosek 4.4** *Jeśli jedyną równowagę Nasha gry populacyjnej o dwóch strategiach stanowi polimorficzny stan populacji, to jest on jedynym stanem ewolucyjnie stabilnym.*

*Dowód.* Niech jedyną równowagę Nasha gry populacyjnej o dwóch strategiach stanowi taki polimorficzny stan populacji, który nie jest stanem ewolucyjnie stabilnym. Wówczas z Wniosku 4.2 istnieje inny stan, który ma tę własność. Skoro istnieją dwa stany ewolucyjnie stabilne, to ze Spostrzeżenia 4.4 gra posiada dwie równowagi Nasha, co jest sprzeczne z przyjętym założeniem. ■

### Dynamika gry populacyjnej o dwóch strategiach

Każdy stan ewolucyjnie stabilny jest równowagą Nasha gry populacyjnej (por. Wniosek 4.1). Z kolei każda równowaga Nasha jest stanem stacjonarnym dynamiki wyznaczonej równaniem (4.8) (Sandholm 2010b), ponieważ w równowadze Nasha prawie wszyscy (w sensie miary Lebesgue’a) uczestnicy gry nie mają motywacji do zmiany używanych przez siebie strategii. Zatem każdy stan ewolucyjnie stabilny jest stanem stacjonarnym dynamiki określonej przez (4.8). O stanie ewolucyjnie stabilnym wiadomo, że jest odporny na zaburzenia, tzn. na niewielkie zmiany zachodzące w populacji. Czy jednak można o nim powiedzieć, że jest stanem stabilnym w sensie dynamiki generowanej równaniem (4.8)? Czy dynamika ta, choćby dla podstawowych protokołów postępowania, zbiega do tego stanu?

Pytanie to sprowadza się do ustalenia czy ewolucyjnie stabilny polimorficzny stan populacji ze Spostrzeżenia 4.2 jest globalnym stanem ewolucyjnie stabilnym dynamiki określonej równaniem (4.8).

Dla dwuelementowego zbioru strategii  $S = \{s_1, s_2\}$ , dynamikę stanu populacji  $x = (x_1, 1 - x_1) \in \Delta(S)$  daną równaniem (4.8) można ze względu na zależność  $x_2 = 1 - x_1$

opisywać przy pomocy równania:

$$\dot{x}_1 = (1 - x_1)\rho_{21}(\pi(x), x) - x_1(t)\rho_{12}(\pi(x), x), \quad (4.30)$$

gdzie  $\rho$  jest ustalonym protokołem postępowania (por. Rozdział 4.1.1).

Niech  $a < c$  i  $d < b$ , wtedy  $a - c + d - b < 0$ . Niech  $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ , gdzie  $x_1^*$  jest określone równaniem (4.24). Na mocy Spostrzeżenia 4.4 polimorficzny stan populacji  $x^*$  jest ewolucyjnie stabilny. Równania trzech najważniejszych dynamik ewolucyjnej teorii gier: dynamiki replikatorowej, dynamiki Browna-von Neumanna-Nasha oraz dynamiki Smitha, przyjmują przy tych ustaleniach następującą postać:

- równanie dynamiki replikatorowej:

$$\dot{x}_1 = x_1(\pi_1(x) - \pi_{av}(x)) = (a - c + d - b) x_1 (1 - x_1)(x_1 - x_1^*). \quad (4.31)$$

Dla  $x_1 \in (0, x_1^*)$  zachodzi nierówność  $\dot{x}_1 > 0$ , natomiast gdy  $x_1 \in (x_1^*, 1)$ , to  $\dot{x}_1 < 0$ . Oznacza to, że punkt stały dynamiki replikatorowej  $x_1^* \in (0, 1)$  określony wzorem (4.24) jest globalnie przyciągający, tzn.  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = x_1^*$ , gdy  $\dot{x}_1$  jest dane przez (4.31).

- równanie dynamiki Browna-von Neumanna-Nasha:

$$\dot{x}_1 = (1 - x_1)[\pi_1(x) - \pi_{av}(x)]_+ - x_1[\pi_2(x) - \pi_{av}(x)]_+, \quad (4.32)$$

ma następującą postać w zależności od wartości zmiennej  $x_1$ :

$$\dot{x}_1 = \begin{cases} (a - c + d - b) (1 - x_1)^2 (x_1 - x_1^*), & \text{gdy } x_1 < x_1^*, \\ (a - c + d - b) x_1^2 (x_1 - x_1^*), & \text{gdy } x_1 > x_1^*. \end{cases}$$

Można sprawdzić, że  $\dot{x}_1 > 0$ , gdy  $x_1 \in (0, x_1^*)$  oraz  $\dot{x}_1 < 0$ , gdy  $x_1 \in (x_1^*, 1)$ . Zatem  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = x_1^*$ , a więc punkt stały  $x_1^* \in (0, 1)$  postaci (4.24) jest globalnie przyciągający, gdy  $\dot{x}_1$  jest dane wzorem (4.32).

- równanie dynamiki Smitha

$$\dot{x}_1 = (1 - x_1)[\pi_1(x) - \pi_2(x)]_+ - x_1[\pi_2(x) - \pi_1(x)]_+, \quad (4.33)$$

również należy rozpatrywać dla dwóch przypadków:

$$\dot{x}_1 = \begin{cases} (a - c + d - b)(1 - x_1)(x_1 - x_1^*), & \text{gdy } x_1 < x_1^*, \\ (a - c + d - b) x_1 (x_1 - x_1^*), & \text{gdy } x_1 > x_1^*. \end{cases}$$

Zatem jeśli  $x_1 \in (0, x_1^*)$ , to zachodzi  $\dot{x}_1 > 0$ , a gdy  $x_1 \in (x_1^*, 1)$ , to  $\dot{x}_1 < 0$ . Stąd  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = x_1^*$ , a co za tym idzie  $x_1^* \in (0, 1)$  postaci (4.24) jest globalnie przyciągającym punktem stałym dynamiki określonej wzorem (4.33).

Na podstawie powyższych obliczeń stwierdzono, że stan stacjonarny  $x^* = (x_1^*, 1 - x_1^*) \in \Delta(S)$  (por. Definicja 4.9), w którym odsetek graczy  $x_1^* \in (0, 1)$  używających pierwszej strategii określony wzorem (4.24), jest globalnie przyciągający (tzn.  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = x_1^*$ ) dla każdej z dynamik zadanych równaniami (4.31), (4.32) oraz (4.33). Zatem jeśli w grze populacyjnej o dwóch strategiach istnieje polimorficzny stan populacji  $x^* = (x_1^*, 1 - x_1^*) \in \Delta(S)$ , który jest ewolucyjnie stabilny (zob. Definicja 4.8), to stan ten jest równocześnie asymptotycznie stabilny ze względu na dynamikę wprowadzoną protokołami postępowania: (4.9), (4.11) oraz (4.13). Okazuje się zatem, że w grach populacyjnych o dwóch strategiach jedyną polimorficzną równowagę Nasha gwarantuje odporność tej równowagi na niewielkie zaburzenia (por. Wniosek 4.4), a ponadto decyzje podejmowane przez graczy prowadzą populację w pobliże tego stanu równowagi.

## 4.2. Różnorodność w systemie ekonomicznym z nieprzeliczalną ilością podmiotów

Analogicznie jak w części 2.2.1, w konstruowanym poniżej systemie ekonomicznym miejscem działania podmiotów, którymi są producenci oraz konsumenci, jest przestrzeń towarów  $\mathbf{R}^l$  określona formułą (2.11). W tej części rozprawy przyjmuje się jednak, że zbiór producentów (firm) działających w przestrzeni towarów jest zbiorem nieprzeliczalnym  $\mathcal{B}$  utożsamionym z odcinkiem domkniętym  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ .

**Definicja 4.10** *Systemem produkcji z nieprzeliczalną liczbą producentów ze zbioru  $\mathcal{B} = [0, 1]$  nazywa się parę  $\mathcal{P} = (\mathcal{B}, y)$ , gdzie odwzorowanie*

$$y: \mathcal{B} \ni b \mapsto Y^b \subset \mathbf{R}^l, \quad (4.34)$$

przypisuje każdemu producentowi  $b \in \mathcal{B}$  niepusty i domknięty **zbiór produkcji**  $Y^b$ .

Pozostałe ustalenia i oznaczenia z części 2.2.1 dotyczące systemu produkcji pozostają bez zmian, tzn. przyjmuje się, że przy danym systemie cen każdy z producentów wybiera możliwy do zrealizowania plan produkcji  $y^b \in Y^b$ , osiągając zysk wynoszący  $p \cdot y^b$ , a zbiór planów produkcji możliwych do przeprowadzenia w systemie  $\mathcal{P}$ , oznaczony przez  $Y$ , określony jest wzorem (2.14). Podobnie jak zbiór producentów, również zbiór konsumentów  $\mathcal{H}$ , działających w przestrzeni towarów  $\mathbf{R}^l$ , jest w rozważanym modelu zbiorem nieprzeliczalnym utożsamionym z odcinkiem  $[0, 1]$ .

**Definicja 4.11** *Systemem konsumpcji z nieprzeliczalną liczbą konsumentów ze zbioru  $\mathcal{H} = [0, 1]$  nazywa się czwórkę  $\mathcal{C} = (\mathcal{H}, \xi, \varepsilon, \omega)$ , gdzie odwzorowania:  $\xi, \varepsilon$  oraz  $\omega$ , które zadają odpowiednio: zbiór konsumpcji, relację preferencji oraz wektor zasobu dla każdego konsumenta, są zdefiniowane analogicznie jak w części 2.2.1.*

Przyjmuje się, że konsumenci są właścicielami firm, przy czym każdy konsument posiada udziały w co najwyżej skończonej liczbie firm, a także dla każdego producenta (firmy) liczba konsumentów, którzy mają udziały w danej firmie jest skończona. Dzięki temu można określić odwzorowanie opisujące udziały poszczególnych konsumentów w zyskach producentów (por. wzór (2.18)). Przy danym systemie cen, każdy konsument może przeznaczyć własne środki, podlegające ograniczeniom budżetowym, na konsumpcję lub inwestycje w firmach, w których ma udziały.

**Definicja 4.12** *Ekonomią z nieprzeliczalną ilością podmiotów nazywa się trójkę  $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{C}, \bar{\theta})$ , gdzie  $\mathcal{P} = (\mathcal{B}, y)$  jest systemem produkcji z nieprzeliczalną ilością producentów,  $\mathcal{C} = (\mathcal{H}, \xi, \varepsilon, \omega)$  jest systemem konsumpcji z nieprzeliczalną ilością konsumentów, a udziały konsumentów w zyskach producentów określa przyporządkowanie  $\bar{\theta}: \mathcal{H} \times \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$ , przy czym*

$$\sum_{a \in H} \bar{\theta}(a, b) = \sum_{i=1}^{k_b} \bar{\theta}(a_i^b, b) = 1, \quad k_b \in \mathbb{N},$$

gdzie  $\{a_1^b, \dots, a_{k_b}^b\} \subset \mathcal{H}$  jest skończonym zbiorem konsumentów posiadających udziały w firmie  $b \in \mathcal{B}$ .

Przy danym wektorze cen  $p \in \mathbf{R}^l$ , system ekonomiczny  $\mathcal{E}$  działa analogicznie jak system  $E$  opisany w części 2.2.1.

W prezentowanym modelu konkurencji schumpeterowskiej na zachowania firm wpływają preferencje konsumentów, wyrażone w funkcji różnorodności poprzez wagi, jakie konsumenci nadają poszczególnym atrybutom w przestrzeni towarów.

### **Funkcja różnorodności w systemie ekonomicznym z nieprzeliczalną ilością podmiotów**

Funkcję różnorodności w przestrzeni towarów można określić na podstawie funkcji ważących atrybuty konsumentów ze zbioru nieprzeliczalnego, analogicznie jak to miało miejsce w podrozdziale 2.3 dla skończonego zbioru konsumentów (zob. Definicja 2.16). Dokładniej, niech zbiór konsumentów  $\mathcal{H}$  będzie utożsamiony z odcinkiem  $[0, 1]$  wyposażonym w miarę Lebesgue'a  $\mu$ . Przyjmuje się, że w przestrzeni towarów  $\mathbf{R}^l$  jest określony skończony zbiór  $\mathcal{A}$  dany wzorem (2.22), z którego każdy konsument  $a \in \mathcal{H}$  wybiera istotne dla siebie atrybuty i przypisuje im własne wagi. Niech funkcja

$$\lambda^a: 2^{\mathbf{R}^l} \ni A \mapsto \lambda_A^a \in [0, +\infty) \quad (4.35)$$

będzie *funkcją ważącą atrybuty konsumenta*  $a \in \mathcal{H}$  zadaną zgodnie z Definicją 2.16, tzn. niech rodzina istotnych atrybutów konsumenta  $\Lambda^a$  będzie podzbiorem rodziny  $\mathcal{A}$ , a łączna waga istotnych atrybutów konsumenta  $a$  wynosi 1.

Funkcję, która w przestrzeni towarów waży atrybuty konsumentów ze zbioru nieprzeliczalnego  $\mathcal{H}$ , można zdefiniować analogicznie jak w podrozdziale 2.3 (zob. Definicja 2.17), o ile dla każdego  $A \subset \mathbf{R}^l$  funkcja

$$\zeta_A: \mathcal{H} \rightarrow [0, 1], \quad (4.36)$$

która każdemu konsumentowi  $a \in \mathcal{H}$  przypisuje wagę  $\zeta_A(a) := \lambda_A^a$  jaką ten konsument nadał ustalonemu atrybutowi  $A$  jest mierzalna. Warunek ten oznacza, że dla każdego atrybutu  $A \subset \mathbf{R}^l$  zbiór

$$\{a \in \mathcal{H}: \lambda_A^a > c\} \quad (4.37)$$

konsumentów, którzy przypisali temu atrybutowi wagę większą niż ustalona wartość  $c \in [0, 1]$  jest mierzalny (zob. np. Łojasiewicz 1976).

Niech dla każdego  $A \subset \mathbf{R}^l$  funkcja określona formułą (4.36) będzie mierzalna.

**Definicja 4.13** Funkcję  $\lambda: 2^{\mathbf{R}^l} \ni A \mapsto \lambda_A \in [0, 1]$ , która każdemu atrybutowi  $A \subset \mathbf{R}^l$  przypisuje

suje jego wagę równą

$$\lambda_A := \int_{\mathcal{H}} \zeta_A d\mu \quad (4.38)$$

nazywa się **funkcją ważącą atrybuty konsumentów ze zbioru nieprzeliczalnego  $\mathcal{H}$** .

Waga  $\lambda_A \in [0, 1]$  jest równa wartości średniej z wag przypisanych atrybutowi  $A \subset \mathbf{R}^l$  przez konsumentów ze zbioru  $\mathcal{H}$ . Co za tym idzie, waga atrybutu, który nie należy do skończonej rodziny  $\mathcal{A}$ , wynosi zero. Zbiór

$$\Lambda := \left\{ A \subset \mathbf{R}^l : \mu(\{a \in \mathcal{H} : \lambda_A^a > 0\}) > 0 \right\} \subset \mathcal{A}. \quad (4.39)$$

stanowi **rodzinę istotnych atrybutów dla konsumentów ze zbioru  $\mathcal{H}$** . W skład rodziny określonej wzorem (4.39) wchodzi wszystkie te atrybuty ze zbioru  $\mathcal{A}$ , które są istotne dla prawie wszystkich konsumentów ze zbioru  $\mathcal{H}$ .

Na bazie funkcji ważącej atrybuty konsumentów ze zbioru  $\mathcal{H}$  (zob. Definicja 4.13) można w przestrzeni towarów  $\mathbf{R}^l$  określić funkcję różnorodności analogicznie jak to miało miejsce dla skończonego zbioru konsumentów (por. Definicja 2.18).

**Definicja 4.14** Funkcję  $v: 2^{\mathbf{R}^l} \rightarrow [0, +\infty)$ , której wartość dla dowolnego zbioru  $D \subset \mathbf{R}^l$  jest równa

$$v(D) = \sum_{A \in \Lambda: A \cap D \neq \emptyset} \lambda_A, \quad (4.40)$$

gdzie  $\lambda: 2^{\mathbf{R}^l} \rightarrow [0, +\infty)$  jest funkcją ważącą atrybuty konsumentów ze zbioru  $\mathcal{H}$  określoną Definicją 4.13, nazywa się **funkcją różnorodności w przestrzeni towarów określoną przez konsumentów ze zbioru nieprzeliczalnego  $\mathcal{H}$** .

Tak zdefiniowana funkcja różnorodności w przestrzeni towarów  $\mathbf{R}^l$  pełni analogiczną rolę w systemie ekonomicznym  $\mathcal{E}$ , jak funkcja różnorodności określona Definicją 2.18 dla skończonej liczby podmiotów w systemie ekonomicznym  $E$ . Na podstawie funkcji zadanej Definicją 4.14 określa się dla  $D \subset \mathbf{R}^l$  oraz  $x, y \in \mathbf{R}^l$  **różnorodność krańcową zbioru  $D$**  (por. wzór (2.27)):

$$d(x, D) := v(D \cup \{x\}) - v(D) = \sum_{A \in \Lambda: x \in A, A \cap D = \emptyset} \lambda_A \quad (4.41)$$

oraz *różnicę między  $x$  a  $y$  z punktu widzenia konsumentów ze zbioru  $\mathcal{H}$*  (por. (2.28)):

$$d(x, y) := d(x, \{y\}) = v(\{x, y\}) - v(\{y\}) = \sum_{A \subset \Lambda: x \in A, y \notin A} \lambda_A. \quad (4.42)$$

Jeśli  $\mathcal{E}$  jest ekonomią z nieprzeliczalną ilością podmiotów (zob. Definicja 4.12), natomiast  $v: 2^{\mathbf{R}^l} \rightarrow [0, +\infty)$  jest funkcją różnorodności w przestrzeni towarów określoną przez konsumentów ze zbioru  $\mathcal{H}$  działających w  $\mathcal{E}$ , to funkcja ważąca atrybuty konsumenta  $a \in \mathcal{H}$  określona wzorem (4.35) zadaje postać relacji preferencji tego konsumenta w systemie ekonomicznym  $\mathcal{E}$  zgodnie z formułą (2.29).

### 4.3. Gra schumpeterowska jako gra populacyjna

Poniżej przedstawiono model konkurencji schumpeterowskiej, w którym zmiany zachodzące w populacji producentów, działających w ustalonym systemie ekonomicznym, analizuje się w czasie ciągłym. W proponowanym modelu producenci konkurują ze sobą o środki posiadane przez konsumentów, podejmując decyzje o wprowadzaniu innowacji, bądź o rezygnacji z ich wprowadzania. To współzawodnictwo, modelowane w postaci gry strategicznej, powoduje że producenci otrzymują impuls do zmiany swoich zachowań, w zależności od działań podjętych przez pozostałe firmy. Strategiczne interakcje, które zachodzą wśród producentów, wymagają zdefiniowania systemu ekonomicznego, w którym po stronie podaży działa nieprzeliczalna ilość firm. Strona popytowa modelowanego systemu, po której również występuje nieprzeliczalna ilość konsumentów, jest sprowadzona do najprostszej możliwej postaci. Mianowicie, zakłada się, że konsumenci przy danym systemie cen dysponują odpowiednimi środkami na zakup wybranych przez siebie koszyków towarów, o których decydują zgodnie ze swoimi preferencjami.

#### 4.3.1. Strategie schumpeterowskie

W teorii rozwoju gospodarczego J. A. Schumpetera (1934; 1943) najważniejsze znaczenie przypisuje się dwóm rodzajom przedsiębiorców. Pierwszy z nich stanowią imitatorzy, którzy stosują znane rozwiązania technologiczne i stanowią podstawę systemu produkcyjnego gospodarki. Drugi rodzaj przedsiębiorców, zwanych innowatorami, decyduje się na zmianę

zaistniałej sytuacji, modyfikując proces technologiczny poprzez podjęcie pewnych prac rozwojowych. Tego rodzaju modyfikacje, choć kosztowne, mogą przynieść producentowi, który się na nie decyduje, dodatkowy zysk dzięki zaistnieniu chwilowego monopolu na rynku. W proponowanym w tym rozdziale modelu analizuje się zmiany zachodzące w populacji producentów, wśród których są tacy, którzy nie decydują się na wprowadzenie innowacji i inni, którzy innowację wprowadzają. Ten najprostszy i najbardziej naturalny podział producentów na innowatorów i imitatorów gwarantuje, w pewnych okolicznościach, istnienie nietrywialnej struktury w populacji producentów rywalizujących o nowe możliwości biznesowe.

Niech  $\mathcal{E}' = (\mathcal{P}, \mathcal{C}, \bar{\theta})$  będzie ekonomią z nieprzeliczalną ilością podmiotów określoną Definicją 4.12. Niech  $v: 2^{\mathbf{R}^l} \rightarrow [0, +\infty)$  będzie funkcją różnorodności w przestrzeni towarów zadaną zgodnie z Definicją 4.14 przez konsumentów ze zbioru  $\mathcal{H}$ , działających w systemie ekonomicznym  $\mathcal{E}'$ . Ze względu na to, że analiza zmian ewolucyjnych dotyczy zachowań producentów, w modelu przyjmuje się uproszczoną postać systemu konsumpcji. Mianowicie zakłada się, że relacja preferencji każdego konsumenta  $a \in \mathcal{H}$  jest zdefiniowana przy pomocy wzoru (2.29) i przy danym systemie cen  $p \in \mathbf{R}^l$  każdy konsument posiada zasoby wystarczające do realizacji wybranego przez siebie planu konsumpcji. W tej części rozprawy zakłada się, że w systemie ekonomicznym przy ustalonym systemie cen, producenci dokonują wyborów strategii związanych z realizacją planów produkcji o określonych cechach, a zmiany zachodzące w populacji producentów, wynikające z podejmowania przez nich strategicznych decyzji, są obserwowane w czasie ciągłym.

Zbiór planów produkcji możliwych do zrealizowania w ekonomii  $\mathcal{E}'$  oznacza się przez  $Y'$ . Zakłada się przy tym, że  $Y' = Y \cup \{y'\}$ , gdzie  $y' \notin Y$ , co interpretuje się zgodnie z terminologią przyjętą w podrozdziale 2.2. Mianowicie przyjmuje się, że każdy z elementów  $y \in Y$  jest planem produkcji, który był możliwy do zrealizowania w poprzednim okresie (w sensie Definicji 2.9), natomiast  $y'$  jest planem innowacyjnym (por. Definicja 2.10). Zakłada się również, że jeśli innowacyjny plan produkcji  $y'$  wiąże się z wprowadzeniem na rynek nowego towaru  $i = 1, \dots, l$ , to cena  $p_i \in \mathbb{R}$  tego towaru, ustalona przez każdego z producentów realizujących plan  $y'$  jest taka sama.

Niech każdy z producentów w ekonomii  $\mathcal{E}'$  ma możliwość zrealizowania dowolnego planu ze zbioru  $Y'$ , tzn. zbiór produkcji każdego producenta  $b \in \mathcal{B}$  jest postaci  $Y'^b = Y'$ . Zatem każdy z producentów w ekonomii  $\mathcal{E}'$  może stać się innowatorem, realizując plan  $y'$  lub wybrać



znane rozwiązanie technologiczne i zrealizować pewien plan  $y \in Y$ . Jeśli przy danym systemie cen  $p \in \mathbf{R}^l$  producent  $b \in \mathcal{B}$  wprowadza w systemie ekonomicznym  $\mathcal{E}'$  dowolny plan produkcji  $y \in Y$ , to jego zysk wynosi  $p \cdot y$ . Gdy, przy tym samym systemie cen, producent  $b$  zamiast realizować znany plan produkcji  $y$ , decyduje się na zrealizowanie innowacyjnego planu  $y'$ , to różnica w zysku, jaką może z takiej zmiany otrzymać, jest równa  $p \cdot y' - p \cdot y$ . Stąd, przy ustalonym systemie cen  $p$  oraz przy ustalonych planach produkcji  $y, y' \in Y'$  definiuje się:

- $V := p \cdot y > 0$ , jako zysk producenta używającego ustalonego planu imitacyjnego  $y \in Y$ ;
- $\gamma := p \cdot (y' - y) \geq 0$  określające zmianę zysku producenta, który stosuje innowacyjny plan produkcji  $y'$  zamiast znanego planu  $y \in Y$ .

Przy powyższych oznaczeniach zysk producenta, który podejmuje się działalności innowacyjnej wynosi

$$V' := p \cdot y' = V + \gamma.$$

Zysk ten może być dowolną liczbą rzeczywistą. W dalszej części rozprawy używa się również następujących określeń: zysk imitatora  $V > 0$  nazywa się również *wartością rynku dla  $y$* , zysk innowatora  $V' > 0$  nazywa się *wartością rynku dla  $y'$* , a wartość  $\gamma > 0$  nazywa się *przyrostem wartości rynku dla innowacji*.

Niech będzie ustalony system cen  $p$  oraz plany produkcji  $y, y'$  takie, że zachodzi  $V > 0$  oraz  $\gamma \geq 0$ . Zakłada się, że przyrost zysku  $\gamma$  producenta-innowatora zależy od przyrostu różnorodności, uzyskanego dzięki użyciu innowacyjnego planu  $y'$ , przyjmując uproszczenie, polegające na założeniu, że istnieje ustalony plan  $y \in Y$ , który posiada wszystkie istotne atrybuty realizowane w zbiorze  $Y$ . Wówczas zachodzi równość:  $v(\{y\}) = v(Y)$ , a co za tym idzie również  $d(y', Y) = d(y', y)$ . Niech  $y'$  będzie planem istotnie innowacyjnym (zob. Definicja 3.1). Oznacza to, że zachodzi nierówność  $d(y', y) > 0$ , a plan  $y'$  posiada atrybut nowy (w stosunku do atrybutów posiadanych przez plan  $y$ , a więc zgodnie z przyjętym założeniem, również w stosunku do atrybutów realizowanych w zbiorze  $Y$ ) i dodatkowo istotny, z punktu widzenia konsumentów działających w tym systemie ekonomicznym. Może się jednak zdarzyć, że realizacja planu  $y'$  spowoduje, że pewne istotne atrybuty posiadane przez znany plan  $y$  przestaną być dostępne dla konsumentów. Sytuacja taka ma miejsce, gdy zachodzi nierówność  $d(y, y') > 0$ , czyli gdy plan  $y$  posiada pewien istotny z punktu widzenia konsumentów atrybut, którego nie ma istotnie innowacyjny plan  $y'$ . Niech  $d(y', y) > d(y, y') \geq 0$ . Niech funkcja rosnąca  $g_p: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$

spełniająca warunek  $g_p(0) = 0$  określa wartość rynkową każdej z różnic  $d(y', y)$  oraz  $d(y, y')$ . Wówczas przyrost zysku innowatora  $\gamma$  można wyrazić jako różnicę:

$$\gamma = g_p(d(y', y)) - g_p(d(y, y')) > 0.$$

Przy oznaczeniach  $\alpha := g_p(d(y', y))$  oraz  $\beta := g_p(d(y, y'))$  zysk innowatora z wprowadzenia istotnie innowacyjnego planu produkcji wyraża się wzorem:

$$V' = V + \alpha - \beta \quad (4.43)$$

gdzie  $\alpha > \beta \geq 0$ .

Zatem, przy powyższych ustaleniach, jeśli w systemie produkcji działa pojedynczy producent, który używa planu  $y$ , to zyskuje  $V > 0$ , jeśli natomiast wprowadza on istotną innowację, to jego zysk wynosi  $V' > V$ . Zysk producenta w obecności innych firm, które decydują się na użycie jednego z planów:  $y$  lub  $y'$  modeluje się w dalszej części pracy.

Funkcja  $g_p$ , która pozwala na wycenę zmiany jakościowej zachodzącej w systemie ekonomicznym pod wpływem użycia planu istotnie innowacyjnego  $y'$  w miejsce imitacyjnego planu  $y$  przy danym systemie cen  $p$ , może mieć w najprostszym przypadku postać funkcji liniowej:  $g_p(x) = cx$  dla pewnego  $c > 0$ . Inną możliwość zakłada określenie tej funkcji rosnącej jednym ze wzorów typu:  $g_p(x) = \sqrt{x}$ ,  $g_p(x) = \log(x + 1)$  czy też  $g_p(x) = x^2$ .

W celu konstrukcji gry populacyjnej, która opisuje zachowania producentów w systemie ekonomicznym  $\mathcal{E}'$ , gdzie  $v: 2^{\mathbf{R}^l} \rightarrow [0, +\infty)$  jest funkcją różnorodności w przestrzeni towarów określoną przez konsumentów zgodnie z Definicją 4.14, a zbiór produkcji każdego producenta  $b \in \mathcal{B}$  ma postać  $Y = \{y, y'\} \subset \mathbf{R}^l$ , gdzie  $d(y', y) > 0$ , zakłada się, że przy danym systemie cen  $p \in \mathbf{R}^l$  każdy z producentów w populacji  $\mathcal{B}$  ma do wyboru następujące dwie strategie polegające na zrealizowaniu jednego z planów produkcji  $y$  lub  $y'$ .

- **Strategia imitacyjna (zachowawcza)**, oznaczana przez  $Z$ , polega na wyborze znanego rozwiązania produkcyjnego i zrealizowaniu planu produkcji  $y$ , z którego zysk może wynieść  $V > 0$ ;
- **Strategia innowacyjna**, którą oznacza się przez  $I$ , jest strategią producenta-innowatora. Użycie tej strategii wymaga od producenta podjęcia kosztownych działań, takich jak: pro-

wadzenie działalności naukowo-badawczej, modyfikację technologii, czy wprowadzenie w przedsiębiorstwie zmian organizacyjnych, na które producent przeznaczają ustalony nakład kapitału o wartości  $F > 0$  (ten sam dla wszystkich producentów wprowadzających innowacje). Działania te skutkują wprowadzeniem istotnie innowacyjnego planu produkcji  $y'$ , co może przynieść zysk  $V' > 0$  określony wzorem (4.43), który zależy od przyrostu różnorodności związanego z użyciem planu  $y'$  w miejsce  $y$ .

Zarówno użycie strategii imitacyjnej  $Z$ , jak i strategii innowacyjnej  $I$ , odpowiada konkretnemu zachowaniu producenta w opisywanej przez J.A. Schumpetera (1934) teorii rozwoju gospodarczego. Stąd też obie powyższe strategie nazywa się strategiami schumpeterowskimi (por. Andersen 2007).

**Definicja 4.15** *Strategią schumpeterowską nazywa się zarówno strategię imitacyjną  $Z$ , jak i strategię innowacyjną  $I$ . Zbiór  $S = \{I, Z\}$  nazywa się **zbiorem strategii schumpeterowskich**.*

#### 4.3.2. Wypłaty ze strategii schumpeterowskich

Niech zbiór strategii dostępnych dla każdego producenta w populacji  $\mathcal{B}$  będzie zbiorem strategii schumpeterowskich  $S = \{I, Z\}$ . Przy ustalonym systemie cen, wypłata w grze populacyjnej zależy od strategii wybieranych przez wszystkich producentów, czyli od stanu populacji producentów  $\mathcal{B}$ , który jest wektorem  $x = (x_1, x_2) \in \Delta(S)$ , gdzie  $x_1$  oznacza odsetek populacji firm stosujących strategię  $I$ , natomiast  $x_2 = 1 - x_1$  jest odsetkiem producentów używających strategii  $Z$ . W szczególności, przy ustalonym systemie cen, wypłata ustalonego producenta w symetrycznej grze dwuosobowej z wylosowanym z populacji konkurentem, zależy od strategii zastosowanych przez obie firmy.

Przy powyższych ustaleniach, należy rozważyć następujące trzy (ze względu na symetrię rozgrywki dwuosobowej) przypadki, przedstawione w Tabeli 4.2.

**Scenariusz 1.** Obaj gracze wybierają strategię  $Z$  i używają imitacyjnego planu produkcji  $y$ , dzieląc między siebie zysk wynoszący  $V > 0$ .

**Scenariusz 2.** Jeden z producentów wybiera strategię  $Z$  i używa imitacyjnego planu produkcji  $y$ , natomiast druga z firm stosuje strategię  $I$  i ponosząc koszt  $F > 0$ , wdraża plan  $y'$ , który jest istotnie innowacyjny w stosunku do  $y$ . Wypłata producenta-innowatora wynosi wówczas  $V' = V + \alpha - \beta - F$ , przy czym wartość  $-\beta$  określa, jaka część zysku

|             |     |                                                              |                                 |
|-------------|-----|--------------------------------------------------------------|---------------------------------|
|             |     | Producent 2                                                  |                                 |
|             |     | $I$                                                          | $Z$                             |
| Producent 1 | $I$ | $\frac{V+\alpha-\beta}{2} - F, \frac{V+\alpha-\beta}{2} - F$ | $V + \alpha - \beta - F, \beta$ |
|             | $Z$ | $\beta, V + \alpha - \beta - F$                              | $\frac{V}{2}, \frac{V}{2}$      |

Tabela 4.2: Macierz wypłat dla zbioru strategii  $S = \{I, Z\}$

innowatora pozostaje w ręku imitatora używającego planu  $y$ . Stąd wypłata imitatora jest równa  $\beta \geq 0$ , przy czym jeśli innowacyjny plan produkcji  $y'$  posiada wszystkie istotne atrybuty planu  $y$ , to  $\beta = 0$ .

**Scenariusz 3.** Obaj przedsiębiorcy zastępują plan  $y$  innowacyjnym planem  $y'$ . Każdy z producentów ponosi z osobna koszt innowacji  $F > 0$ , a dzieli się z drugim graczem zyskiem z wprowadzenia innowacji wynoszącym  $V + \alpha - \beta$ . Obecność składnika  $-\beta$  wynika z faktu, że plan  $y$ , który może posiadać atrybuty istotne z punktu widzenia konsumentów, nie jest w tym wypadku używany przez żadnego z producentów.

Scenariusze opisane powyżej określają grę populacyjną  $\mathcal{G}$  w nieprzeliczalnej populacji producentów  $\mathcal{B}$  i zbiorze strategii schumpeterowskich  $S = \{I, Z\}$ , w której funkcja wypłaty  $f: S \times S \rightarrow \mathbb{R}$  jest określona macierzą przedstawioną w Tabeli 4.2. Poszczególne wartości tej funkcji można interpretować następująco:

- gdy obaj producenci stosują strategię  $I$ , używając tego samego innowacyjnego planu produkcji  $y'$ , to dzielą się zyskiem z wprowadzenia innowacji wynoszącym  $V + \alpha - \beta$  (por. wzór (4.43)) po połowie, ponosząc z osobna cały nakład na innowacje równy  $F > 0$ . Wówczas wypłata każdego z producentów  $f(I, I) = \frac{V+\alpha-\beta}{2} - F$ ; składnik  $-\beta$  określa jaka jest wartość rynkowa różnicy  $d(y, y')$ , która nie zostaje wykorzystana przez innowatorów ze względu na to, że plan  $y'$  nie ma wszystkich atrybutów planu  $y$ ;
- jeśli dokładnie jeden producent stosuje strategię  $I$ , to otrzymuje wypłatę wynoszącą  $f(I, Z) = V + \alpha - \beta - F$ , natomiast wypłata imitatora w tej sytuacji jest równa  $f(Z, I) = \beta$  i jest różna od zera, jeśli plan  $y$  ma atrybuty, których nie posiada  $y'$ ;

- c)  $f(Z, Z) = \frac{V}{2}$  oznacza, że gdy obaj producenci stosują strategię  $Z$  i nie wprowadzają innowacji, to dzielą się zyskiem  $V$  z wybranego planu  $y$  po połowie.

Funkcja wypłaty w grze  $\mathcal{G}$  zależy więc od wartości następujących parametrów: zysku z planu  $y$  równego  $V > 0$ , kosztu wprowadzenia innowacji  $F > 0$ , wartości rynkowej różnicy między  $y'$  a  $y$  określonej przez  $\alpha > 0$  oraz wartości rynkowej różnicy między  $y$  a  $y'$  danej przez  $\beta \geq 0$ , przy czym zachodzą nierówności:  $V + \alpha - \beta - F > 0$  oraz  $\beta < \alpha$  (zob. część 4.3.1).

### 4.3.3. Gra schumpeterowska

Schumpeterowskie podejście do rozwoju gospodarczego zakłada, że wśród producentów działających w danym systemie ekonomicznym, są obecni innowatorzy, wprowadzający nowe rozwiązania technologiczne. Równocześnie, pozostali producenci nie podejmują się działalności innowacyjnej (por. Schumpeter 1934). Grę populacyjną, której wynikiem jest powstanie stabilnej struktury populacji, w której współistnieją imitatorzy z innowatorami, nazywa się w rozprawie *grą schumpeterowską* (por. Andersen 2007).

Niech  $\mathcal{G}$  będzie grą populacyjną o zbiorze strategii schumpeterowskich  $S = \{I, Z\}$  i funkcji wypłaty  $f: S \times S \rightarrow \mathbb{R}$  danej macierzą przedstawioną w Tabeli 4.2.

**Definicja 4.16** *Grę populacyjną  $\mathcal{G}$  nazywa się **grą schumpeterowską**, jeśli występuje w niej taki stan ewolucyjnie stabilny, w którym w populacji reprezentowane są obie strategie schumpeterowskie ze zbioru  $S = \{I, Z\}$ .*

Na podstawie podpunktu (ii) Spostrzeżenia 4.4 można sformułować następujący wniosek.

**Wniosek 4.5** *Gra populacyjna  $\mathcal{G}$  jest grą schumpeterowską wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja wypłaty  $f: S \times S \rightarrow \mathbb{R}$  spełnia warunki:*

$$f(I, Z) > f(Z, Z) \text{ oraz } f(Z, I) > f(I, I). \quad (4.44)$$

Wniosek 4.5 pozwala stwierdzić, że gra populacyjna  $\mathcal{G}$  stanowi grę schumpeterowską pod warunkiem, że dla każdego gracza biorącego udział w rozgrywce dwuosobowej korzystny jest wybór strategii alternatywnej wobec strategii przeciwnika. Gry populacyjne tego rodzaju nazywa się ogólnie grami antykoordynacyjnymi (por. Herold, Kuzmics 2020).

Aby funkcja wypłaty określona macierzą z Tabeli 4.2, gwarantowała istnienie stabilnej populacji, składającej się zarówno z imitatorów jak i innowatorów, muszą zostać spełnione określone zależności pomiędzy wartościami parametrów  $F$ ,  $V$ ,  $\alpha$  oraz  $\beta$ .

**Wniosek 4.6** *Gra populacyjna  $\mathcal{G}$  jest grą schumpeterowską wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest układ zależności:*

$$2(F + \beta - \alpha) < V < 2F + 3\beta - \alpha. \quad (4.45)$$

**Uwaga 4.2** *Warunek (4.45) sprowadza się do założenia*

$$2F - V \in (\alpha - 3\beta, 2(\alpha - \beta)). \quad (4.46)$$

Jeśli parametry gry, czyli: koszt wprowadzenia innowacji  $F$ , zysk z imitacyjnego planu produkcji wynoszący  $V$  oraz parametry  $\alpha$  i  $\beta$  związane ze zmianą różnorodności, spełniają zależności (4.45), to pewien niezerowy odsetek producentów z populacji  $\mathcal{B}$ , zdecyduje się na wprowadzenie innowacji, natomiast pozostała część populacji będzie używać znanego planu produkcji  $y$ . Oznacza to, że populacja producentów będzie polimorficzna.

**Uwaga 4.3** *Dla  $\beta = 0$  macierz określona Tabelą 4.2 przyjmuje postać macierzy przedstawionej w Tabeli 4.3, natomiast warunek (4.46) sprowadza się do zależności:  $2F - V \in (\alpha, 2\alpha)$ .*

|             |     |                                                  |                            |
|-------------|-----|--------------------------------------------------|----------------------------|
|             |     | Producent 2                                      |                            |
|             |     | $I$                                              | $Z$                        |
| Producent 1 | $I$ | $\frac{V+\alpha}{2} - F, \frac{V+\alpha}{2} - F$ | $V + \alpha - F, 0$        |
|             | $Z$ | $0, V + \alpha - F$                              | $\frac{V}{2}, \frac{V}{2}$ |

Tabela 4.3: Macierz wypłat dla zbioru strategii  $S$ , gdy  $\beta = 0$

Jeśli w grze schumpeterowskiej zachodzi równość  $\beta = 0$ , to wprowadzony przez innowatora plan produkcji  $y'$  posiada wszystkie istotne dla konsumentów atrybuty planu  $y$  (tzn.  $d(y, y') = 0$ ) i ponadto taki atrybut, który choć był pożądanym przez konsumentów, to nie był dla nich dostępny. Gra schumpeterowska, w której zachodzi warunek  $\beta = 0$ , jest przykładem tzw. *conflict*

*game*. W grach tego typu, zastosowanie „agresywnej” strategii, którą w tym wypadku jest strategia innowacyjna, skutkuje niską wypłatą producenta, gdy przeciwnik również zdecyduje się na wprowadzenie innowacji. W przeciwnym wypadku, innowator odnosi jednak sukces i uzyskuje wysoką wypłatę. Sztandarowym przykładem *conflict game* jest klasyczna gra jastrząb-gołąb (*Hawk-Dove game*), rozważana przez Johna Maynarda Smitha i George’a Roberta Price’a w ich pracy pt. „The logic of animal conflict” (Smith, Price 1973).

#### 4.3.4. Ewolucyjnie stabilny stan gry schumpeterowskiej

Warunek (4.44), który zapewnia, że gra populacyjna  $\mathcal{G}$  jest grą schumpeterowską, gwarantuje istnienie ewolucyjnie stabilnego stanu populacji producentów, w którym obie strategie schumpeterowskie są równocześnie realizowane. Co więcej, zgodnie z Wnioskiem 4.3, taki stan populacji, w którym w systemie ekonomicznym stabilnie współistnieją innowatorzy z imitatorami, jest dokładnie jeden i ma postać określoną wzorem (4.29).

**Twierdzenie 4.3** *W grze schumpeterowskiej (zob. Definicja 4.16), istnieje dokładnie jeden ewolucyjnie stabilny stan populacji. Ponadto, jest to stan, w którym populacja producentów jest polimorficzna. Stan ten ma postać  $x^* = (x_1^*, x_2^*) \in \Delta(S)$ , gdzie  $x_1^* \in (0, 1)$  jest odsetkiem innowatorów,  $x_2^* = 1 - x_1^*$  wyznacza odsetek imitatorów, przy czym:*

$$x_1^* = \frac{f(I, Z) - f(Z, Z)}{f(Z, I) - f(I, I) + f(I, Z) - f(Z, Z)}, \quad (4.47)$$

$$x_2^* = \frac{f(Z, I) - f(I, I)}{f(Z, I) - f(I, I) + f(I, Z) - f(Z, Z)}. \quad (4.48)$$

Odsetek innowatorów  $x_1^*$  dany wzorem (4.47) jest równy unormowanemu przyrostowi wypłaty producenta ze zmiany strategii z  $Z$  na  $I$ , przy założeniu, że przeciwnik stosuje strategię  $Z$ . Podobnie, odsetek imitatorów  $x_2^*$  zgodnie ze wzorem (4.48) zależy od przyrostu wypłaty ze zmiany strategii z  $I$  na  $Z$  w przypadku, gdy konkurent decyduje się na użycie strategii  $I$ . Oznacza to, że w grze schumpeterowskiej, w stanie populacji, który jest ewolucyjnie stabilny, dla każdego producenta korzystne jest używanie strategii innej niż strategia jego konkurenta. Taki stan populacji, w którym jest ona złożona zarówno z innowatorów jak i imitatorów, odgrywa szczególną rolę w schumpeterowskiej teorii rozwoju gospodarczego (por. Schumpeter 1934).

**Definicja 4.17** *Jedyny ewolucyjnie stabilny stan populacji w grze schumpeterowskiej nazywa się stanem schumpeterowskim.*

Zgodnie z Twierdzeniem 4.3 stan schumpeterowski w grze schumpeterowskiej istnieje i jest jedyny. Populacja producentów jest w nim polimorficzna, tzn. reprezentowane są w nim obie strategie schumpeterowskie (zob. Definicja 4.15). Zatem populacja monomorficzna, złożona wyłącznie z innowatorów, albo wyłącznie z imitatorów, nie tworzy stanu schumpeterowskiego. Stan schumpeterowski odzwierciedla taką postać systemu ekonomicznego, w której niektórzy producenci decydują się na wprowadzanie innowacji, podczas gdy inni wykorzystują znane plany produkcyjne. W takim polimorficznym stanie, struktura populacji firm jest nietrywialna, tzn. dodatni odsetek producentów decyduje się na wprowadzenie innowacji, a równocześnie w populacji występują producenci stosujący zachowawczą strategię imitacyjną. Definicja 4.17 odpowiada definicji systemu innowacyjnego wprowadzonej przez Andersena (2007).

#### 4.3.5. Własności stanu schumpeterowskiego

Niech gra populacyjna  $\mathcal{G}$  będzie grą schumpeterowską, tzn. niech parametry gry spełniają warunek (4.45). Na podstawie Wniosku 4.3 odsetki: innowatorów i imitatorów w stanie schumpeterowskim  $x^* = (x_1^*, x_2^*)$  gry  $\mathcal{G}$  wynoszą odpowiednio:

$$x_1^* = \frac{V - 2F + 2(\alpha - \beta)}{\alpha + \beta} \quad (4.49)$$

oraz

$$x_2^* = \frac{2F - V - (\alpha - \beta) + 2\beta}{\alpha + \beta}, \quad (4.50)$$

przy czym  $2F - V \in (\alpha - 3\beta, 2(\alpha - \beta))$  (zob. Uwaga 4.2). W szczególnym przypadku, gdy  $\beta = 0$ , odsetek innowatorów  $x_1^*$  i odsetek imitatorów  $x_2^*$  są w stanie schumpeterowskim  $x^* = (x_1^*, x_2^*)$  dane wzorami:

$$x_1^* = \frac{V - 2F + 2\alpha}{\alpha}, \quad (4.51)$$

$$x_2^* = \frac{2F - V - \alpha}{\alpha} \quad (4.52)$$

przy założeniu  $2F - V \in (\alpha, 2\alpha)$ .

Stan schumpeterowski  $x^* = (x_1^*, x_2^*)$  określony równaniami (4.49) i (4.50):



- jest równowagą Nasha gry populacyjnej (zob. Spostrzeżenie 4.1), czyli dla każdego producenta, przy ustalonych strategiach pozostałych firm, zmiana aktualnej strategii nie może zwiększyć jego wypłaty;
- jest stanem ewolucyjnie stabilnym populacji (Definicja 4.17), tzn. populacja poddana niewielkiemu zaburzeniu powraca do tego stanu (zob. Definicja 4.8);
- jest stanem stacjonarnym *mean dynamics* określonej równaniem (4.8); oznacza to, że w stanie schumpeterowskim odsetek innowatorów i imitatorów w populacji nie podlega zmianom, chyba że zmianie ulegną parametry gry (por. część 4.1.2);
- dla każdego z protokołów postępowania opisanych w części 4.1.1, jest stanem asymptotycznie stabilnym dynamiki (4.8), opisującej zmianę odsetka graczy używających danej strategii schumpeterowskiej (por. część 4.1.2).

Na podstawie powyższych własności stanu schumpeterowskiego można stwierdzić, że w grze schumpeterowskiej każdy stan populacji będzie zmierzać do stanu schumpeterowskiego, co więcej, niezależnie od stanu początkowego znajdzie się asymptotycznie blisko stanu schumpeterowskiego. Stąd, potencjalnie skomplikowana analiza zachowań producentów w grze schumpeterowskiej, może zostać sprowadzona do zbadania własności jej stanu schumpeterowskiego, będącego „rozwiązaniem” gry.

Postać stanu schumpeterowskiego zależy od wartości parametrów określających wypłaty; odsetek producentów reprezentujących poszczególne strategie schumpeterowskie, zależy od: kosztu wprowadzenia innowacji  $F > 0$ , zysku imitatora  $V > 0$ , a także przyrostu różnorodności związanego z zastosowaniem innowacyjnego planu produkcji określonego przez parametry:  $\alpha > 0$  oraz  $\beta$ , przy czym  $0 \leq \beta < \alpha$ . Dla ustalonych wartości tych parametrów, struktura populacji producentów w stanie schumpeterowskim jest stała. Można również zauważyć, że przy ustalonych pozostałych parametrach:

- zwiększenie kosztu wprowadzenia innowacji  $F$  zmniejsza odsetek innowatorów w stanie schumpeterowskim;
- im wyższy zysk imitatora  $V$ , tym wyższy odsetek innowatorów w stanie schumpeterowskim;

- postać stanu schumpeterowskiego zależy od wartości różnicy  $2F - V$ , wraz ze wzrostem różnicy  $2F - V$  rośnie odsetek producentów stosujących strategię imitacyjną.

Poniższy przykład obrazuje wpływ zmieniającej się wartości różnicy  $2F - V$  na postać stanu schumpeterowskiego, dla ustalonych wartości  $\alpha$  i  $\beta$ .

**Przykład 4.1** Niech populację  $\mathcal{B}$  stanowią producenci parówek. Niech atrybut  $A_1$  stanowi zbiór produktów zawierających w składzie mięso, natomiast atrybut  $A_2$  będzie zbiorem produktów pochodzenia wyłącznie roślinnego, przy czym oba atrybuty mają dodatnie wagi, pozostające w stosunku  $\frac{\lambda_{A_1}}{\lambda_{A_2}} = \frac{1}{4}$ . Niech  $y$  będzie planem produkcji parówek mięsnych (tzn.  $y \in A_1$ ), natomiast  $y'$  niech będzie istotnie innowacyjnym planem produkcji parówek wyłącznie roślinnych (tzn.  $y' \in A_2$ ), przy czym pozostałe atrybuty realizowane przez plany produkcji  $y$  oraz  $y'$  są takie same. Wtedy:

- $\alpha = g_p(d(y', y)) = g_p(v(\{y', y\}) - v(\{y\})) = g_p(\lambda_{A_2})$ ;
- $\beta = g_p(d(y, y')) = g_p(v(\{y', y\}) - v(\{y'\})) = g_p(\lambda_{A_1})$ .

Niech, dla ustalonego wektora cen  $p$ , zachodzi  $g_p(x) = x$ , gdzie  $x \geq 0$ . Wtedy  $\alpha = \lambda_{A_2}$ ,  $\beta = \lambda_{A_1}$  oraz  $\alpha = 4\beta$ . Jeśli  $2F - V \in (\beta, 6\beta)$ , to spełniony jest warunek (4.46) i istnieje stan schumpeterowski postaci

$$x^* = (x_1^*, x_2^*) = \left( \frac{6}{5} - \frac{2F - V}{5\beta}, \frac{1}{5} + \frac{2F - V}{5\beta} \right).$$

Dla przykładowej wartości  $\beta = 1$  oraz ustalonego  $c := 2F - V \in (1, 6)$  macierz wypłat

|             |     |                                |                            |
|-------------|-----|--------------------------------|----------------------------|
|             |     | Producent 2                    |                            |
|             |     | $I$                            | $Z$                        |
| Producent 1 | $I$ | $\frac{3-c}{2}, \frac{3-c}{2}$ | $\frac{6+V-c}{2}, 1$       |
|             | $Z$ | $1, \frac{6+V-c}{2}$           | $\frac{V}{2}, \frac{V}{2}$ |

Tabela 4.4: Macierz gry z Przykładu 4.1 ( $c = 2F - V$ ,  $\alpha = 4$ ,  $\beta = 1$ ).

przedstawiona jest w Tabeli 4.4, a stan schumpeterowski ma postać:

$$(x_1^*, x_2^*) = \left( \frac{6-c}{5}, \frac{c-1}{5} \right).$$

Dla ustalonych wartości pozostałych parametrów postać stanu schumpeterowskiego zależy od różnicy  $c = 2F - V \in (1, 6)$ : im różnica  $2F - V$  jest większa, tym mniej producentów w stanie schumpeterowskim decyduje się na wprowadzanie innowacji, polegającej na zmianie składu parówek z mięsnego na roślinny.

#### 4.3.6. Wpływ wzrostu różnorodności na postać stanu schumpeterowskiego

Niech, podobnie jak w podrozdziale 4.3.1, w systemie ekonomicznym  $\mathcal{E}' = (\mathcal{P}, \mathcal{C}, \bar{\theta})$  określonym Definicją 4.12, działają producenci z populacji  $\mathcal{B}$ , a preferencje konsumentów wyraża funkcja różnorodności w przestrzeni towarów  $v: 2^{\mathbf{R}^I} \rightarrow [0, +\infty)$  (zob. Definicja 4.14). Niech, zgodnie z uproszczeniem przyjętym w części 4.3.1, zbiór produkcji każdego producenta ma postać:  $Y = \{y', y\}$ , gdzie  $y$  jest planem imitacyjnym, a  $y'$  – planem istotnie innowacyjnym (tzn. zachodzi warunek  $d(y', y) > 0$ ). Przy ustalonym systemie cen  $p$ , zysk pojedynczego producenta wynosi wówczas albo  $V > 0$ , gdy producent realizuje plan  $y$ , albo  $V'$ , gdy realizuje on plan  $y'$ . Zachodzi przy tym równość:  $V' = V + \alpha - \beta$  (por. wzór (4.43)), gdzie parametry  $\alpha > 0$  i  $\beta \geq 0$  takie, że  $\alpha > \beta$ , są określone jako  $\alpha := g_p(d(y', y))$ ,  $\beta := g_p(d(y, y'))$  dla pewnej funkcji rosnącej  $g_p: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ . Wartość  $\alpha > 0$  odzwierciedla dodatni wpływ różnicy  $d(y', y)$  na zysk innowatora. Nieujemna wartość parametru  $\beta$ , która może negatywnie odbić się na zysku innowatora, wskazuje na to, że plan innowacyjny  $y'$  może w niektórych przypadkach nie posiadać pewnego istotnego atrybutu, który ma plan  $y$ .

Przyjmując dodatkowo, że wprowadzenie innowacji, czyli zrealizowanie planu  $y'$ , wiąże się z dodatkowym kosztem  $F > 0$  (zob. część 4.3.2) oraz że zakres dopuszczalnych wartości parametrów określa warunek (4.45), rywalizacja między producentami w systemie ekonomicznym  $\mathcal{E}'$ , modelowana w postaci gry populacyjnej, doprowadza do powstania stabilnej struktury w systemie produkcji. Ta stabilna struktura, czyli stan schumpeterowski (zob. Definicja 4.17) charakteryzuje się tym, że stały niezerowy odsetek firm realizuje w systemie produkcji działania innowacyjne, podczas gdy pozostała część populacji (również o niezerowym odsetku) stosuje znane rozwiązania technologiczne.

Zmiana różnorodności, związana z wprowadzeniem innowacji, wyrażona jest w równaniach określających postać stanu schumpeterowskiego (zob. równania (4.49) i (4.50)) poprzez wartości parametrów  $\alpha$  i  $\beta$ . W celu zbadania wpływu wartości tych parametrów na postać stanu schumpeterowskiego przyjmuje się, że różnica  $\xi := 2F - V$  jest stała. Wówczas, przy założeniu, że zachodzi warunek (4.46), który przyjmuje postać:

$$\xi \in (\alpha - 3\beta, 2(\alpha - \beta)), \quad (4.53)$$

w stanie schumpeterowskim  $(x_1^*, x_2^*)$  odsetek innowatorów jest równy

$$x_1^* = \frac{2(\alpha - \beta) - \xi}{\alpha + \beta}, \quad (4.54)$$

a odsetek imitatorów jest dany przez

$$x_2^* = \frac{3\beta - \alpha + \xi}{\alpha + \beta}. \quad (4.55)$$

Funkcja  $\Gamma_\xi: D_{\Gamma_\xi} \ni (\alpha, \beta) \mapsto \Gamma_\xi(\alpha, \beta) \in (0, 1)$ , która opisuje wpływ wartości  $\alpha$  i  $\beta$  na odsetek innowatorów w stanie schumpeterowskim  $x^* = (x_1^*, x_2^*)$  dla ustalonej wartości parametru  $\xi$  jest dana wzorem

$$\Gamma_\xi(\alpha, \beta) := \frac{2(\alpha - \beta) - \xi}{\alpha + \beta}, \quad (4.56)$$

a jej dziedzinę stanowi zbiór (por. (4.53)):

$$D_{\Gamma_\xi} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2: \frac{\alpha}{3} - \frac{\xi}{3} < \beta < \alpha - \frac{\xi}{2}; \quad \alpha > 0 \right\}. \quad (4.57)$$

**Twierdzenie 4.4** Funkcja  $\Gamma_\xi: D_{\Gamma_\xi} \rightarrow (0, 1)$  dana wzorem (4.56) ma następujące własności:

- (i) funkcja  $\Gamma_\xi$  jest klasy  $C^1$ ;
- (ii) dla ustalonej wartości  $\beta$  funkcja  $\Gamma_\xi(\cdot, \beta): \alpha \mapsto \Gamma_\xi(\alpha, \beta)$  jest rosnąca;
- (iii) dla ustalonej wartości  $\alpha$  funkcja  $\Gamma_\xi(\alpha, \cdot): \beta \mapsto \Gamma_\xi(\alpha, \beta)$  jest malejąca;
- (iv)  $\lim_{\beta \rightarrow \alpha - \frac{\xi}{2}} \Gamma_\xi(\alpha, \beta) = 0$  oraz  $\lim_{\beta \rightarrow \frac{\alpha}{3} - \frac{\xi}{3}} \Gamma_\xi(\alpha, \beta) = 1$ .

*Dowód.* Podpunkt (i) wynika ze wzoru funkcji (4.56). Pochodne cząstkowe funkcji  $\Gamma_\xi$  dla  $(\alpha, \beta) \in D_{\Gamma_\xi}$  wynoszą odpowiednio:

$$\frac{\partial \Gamma_\xi}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) = \frac{4\beta + \xi}{(\alpha + \beta)^2} \quad (4.58)$$

oraz

$$\frac{\partial \Gamma_\xi}{\partial \beta}(\alpha, \beta) = \frac{-4\alpha + \xi}{(\alpha + \beta)^2}. \quad (4.59)$$

Dla każdego  $(\alpha, \beta) \in D_{\Gamma_\xi}$  pochodne cząstkowe dane wzorami (4.58) oraz (4.59) są różne od zera. Zatem funkcja  $\Gamma_\xi$  nie ma ekstremów lokalnych w zbiorze  $D_{\Gamma_\xi}$ . Równocześnie, dla każdego  $(\alpha, \beta) \in D_{\Gamma_\xi}$  zachodzi  $\frac{\partial \Gamma_\xi}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) > 0$ , zatem dla ustalonego  $\beta$  funkcja  $\Gamma_\xi(\cdot, \beta): \alpha \mapsto \Gamma_\xi(\alpha, \beta)$  jest rosnąca, gdy  $(\alpha, \beta) \in D_{\Gamma_\xi}$  (stąd prawdziwy jest podpunkt (ii)). Podobnie, dla każdego  $(\alpha, \beta) \in D_{\Gamma_\xi}$  zachodzi  $\frac{\partial \Gamma_\xi}{\partial \beta}(\alpha, \beta) < 0$ , więc dla ustalonego  $\alpha$  funkcja  $\Gamma_\xi(\alpha, \cdot): \beta \mapsto \Gamma_\xi(\alpha, \beta)$  jest malejąca, gdy  $(\alpha, \beta) \in D_{\Gamma_\xi}$ , co dowodzi prawdziwości podpunktu (iii). Prosty rachunek wykazuje również prawdziwość (iv). ■

Im wartości  $\alpha$  są mniejsze i bliższe  $F - \frac{V}{2}$ , czyli wartości granicznej, po przekroczeniu której polimorficzna populacja producentów przestaje być ewolucyjnie stabilna, tym mniejszy odsetek innowatorów występuje w stanie schumpeterowskim. Z kolei, gdy wartość  $\alpha$  rośnie do maksymalnej wartości (wynoszącej  $2(F - \frac{V}{2})$ ), to w stanie schumpeterowskim pojawia się coraz więcej innowatorów. Zatem im większa wartość  $d(y, y') \geq 0$  wyznaczająca różnicę między imitacyjnym planem produkcji  $y$  a planem innowacyjnym  $y'$ , przy ustalonej wartości  $d(y', y)$ , tym więcej producentów wybiera strategię polegającą na imitacji. Z drugiej strony, im większa jest różnica  $d(y', y)$  między planem innowacyjnym  $y'$  a planem imitacyjnym  $y$ , przy ustalonej wartości  $d(y, y')$ , tym więcej pojawia się innowatorów w populacji producentów. Można zatem sformułować następujący wniosek będący równocześnie odpowiedzią na trzecią z hipotez postawionych we wstępie do niniejszej rozprawy.

**Wniosek 4.7** *Im większy przyrost różnorodności zapewnia wprowadzenie innowacyjnego planu produkcji, przy ustalonych wartościach pozostałych parametrów, tym wyższy odsetek innowatorów w stanie schumpeterowskim.*

Przyrost różnorodności w powyższym wniosku utożsamiony jest z wartością wyrażenia  $d(y', y)$ .

### 4.3.7. Rodzaje gier schumpeterowskich

Każda gra schumpeterowska charakteryzuje się występowaniem globalnie ewolucyjnie stabilnego stanu populacji (por. Wniosek (4.3)), czyli stanu schumpeterowskiego, który ustala się w zależności od wartości parametrów związanych z działalnością producentów ( $\alpha$ ,  $\beta$ ) oraz otoczeniem gospodarczym ( $V$ ,  $F$ ). Poniżej zbadano związek pomiędzy postacią systemu schumpeterowskiego a średnią wypłatą w grze schumpeterowskiej. Średnia wypłata w populacji producentów jest wskaźnikiem jakości używanej przez graczy strategii w przypadku niektórych protokołów postępowania (por. część 4.1.1), a także może stanowić pewien wyznacznik dobrobytu społecznego i punkt odniesienia w poszukiwaniu Pareto-optimalnego wyniku gry schumpeterowskiej.

Niech wartości parametrów  $\alpha > 0$ ,  $F > 0$ ,  $V > 0$  będą ustalone oraz spełniony będzie warunek (4.45), tzn.

$$\beta \in \left( \frac{1}{3}(V + \alpha - 2F), \frac{V}{2} + \alpha - F \right), \quad (4.60)$$

przy czym  $\beta \geq 0$ . Wówczas istnieje stan schumpeterowski  $x^* = (x_1^*, 1 - x_1^*)$ , w którym odsetek innowatorów  $x_1^*$  jest określony wzorem (4.49). Wiadomo, że średnią wypłatę w populacji producentów wyznacza się ze wzoru (4.18). Równanie to w stanie schumpeterowskim  $x^*$  przyjmuje postać:

$$\pi_{av}(x_1^*, 1 - x_1^*) = x_1^* \left( \beta - \frac{V}{2} \right) + \frac{V}{2} = x_1^* \beta + (1 - x_1^*) \frac{V}{2}. \quad (4.61)$$

Zatem średnia wypłata w stanie schumpeterowskim  $x^* = (x_1^*, 1 - x_1^*)$  jest liniową funkcją odsetka innowatorów  $x_1^*$ . Można zauważyć, że wpływ na monotoniczność powyższej funkcji ma zależność jaka zachodzi pomiędzy parametrami  $V$  oraz  $\beta$  gry schumpeterowskiej, w szczególności

1) dla każdego  $\beta \in [0, \frac{V}{2})$

- średnia wypłata w stanie schumpeterowskim jest mniejsza niż średnia wypłata w grze, w której wszyscy producenci rezygnują z wprowadzenia innowacji, tzn.

$$\pi_{av}(x_1^*, 1 - x_1^*) < \pi_{av}(0, 1) = \frac{V}{2},$$

- zachodzą nierówności  $f(I, I) < f(Z, I) = \beta < \frac{V}{2} = f(Z, Z) < f(I, Z)$ , stąd zarówno innowator jak i imitator preferują grę przeciw imitatorowi;

2) dla każdego  $\beta \in (\frac{V}{2}, \alpha)$ ,

- średnia wypłata w stanie schumpeterowskim przyjmuje wartości większe niż wypłata w monomorficznym stanie populacji  $(0, 1)$ , tzn.  $\pi_{av}(x_1^*, 1 - x_1^*) > \pi_{av}(0, 1) = \frac{V}{2}$ ,
- skoro  $f(Z, I) = \beta > \frac{V}{2} = f(Z, Z)$ , to również  $f(I, Z) > f(I, I)$  (z warunku (4.5)), a więc każdy producent uzyskuje wyższą wypłatę, gdy jego przeciwnik wybiera strategię alternatywną wobec jego strategii;

3) gdy  $\beta = \frac{V}{2}$ , to

- średnia wypłata w stanie schumpeterowskim wynosi  $\pi_{av}(x_1^*, 1 - x_1^*) = \pi_{av}(0, 1)$ ,
- $f(I, I) < f(Z, I) = \frac{V}{2} = f(Z, Z) < f(I, Z)$ , co oznacza, że producentowi używającemu strategii  $Z$  jest obojętne, jakiej strategii używa jego przeciwnik, ale producent używający strategii  $I$  otrzymuje wyższą wypłatę, gdy jego przeciwnik stosuje strategię  $Z$  zamiast  $I$ ; czyli o ile imitator jest obojętny na wybór przeciwnika, o tyle innowator preferuje konkurowanie z imitatorem.

Można zauważyć, że jeśli  $\beta < \frac{V}{2}$ , to obecność dużego odsetka innowatorów nie jest korzystna dla populacji. Im mniejsze  $\beta$  tym wypłata  $f(I, Z)$  osiągana przez producenta stosującego strategię innowacyjną jest większa, ale wzrost ten nie przekłada się na dobrobyt społeczny, mierzony średnią wypłatą populacji. Co więcej, w skrajnym przypadku, gdy  $\beta = 0$  wypłata innowatora przeciw imitatorowi w grze schumpeterowskiej jest największa możliwa i równa  $f(I, Z) = V + \alpha - F$ , to równocześnie średnia wypłata w populacji osiąga swoją najmniejszą możliwą wartość:  $\pi_{av}(x_1^*, 1 - x_1^*) = (1 - x_1^*)\frac{V}{2}$ .

Inaczej ma się rzecz, gdy zachodzi nierówność  $\beta > \frac{V}{2}$ . W takiej sytuacji, średnia wypłata przewyższa wartość  $f(Z, Z)$ , przy czym im większy odsetek innowatorów, tym wyższy (mierzony średnią wypłatą) dobrobyt społeczny. Nierówność  $\beta > \frac{V}{2}$  wskazuje, że wypłata imitatora jest wyższa wówczas, gdy jego przeciwnik decyduje się na wprowadzenie innowacji, niż wtedy, gdy z niego rezygnuje (ponieważ  $f(Z, I) > f(Z, Z)$ ). Można tę zależność interpretować następująco (por. Saviotti 2001; Saviotti, Pyka 2004; 2009; Saviotti et al. 2020): innowator odkrywając pewną niszę rynkową eksploatuje ją, umożliwiając równocześnie przejęcie rynku związanego ze znanym planem produkcyjnym przez imitatora. Wówczas obaj producenci odnoszą korzyść z wprowadzenia innowacji przez jednego z nich. Imitator nie ponosząc kosztów

związanych z wprowadzeniem innowacji i zachowując bierną postawę, korzysta z innowacyjnych działań drugiego producenta. Można przy tym zauważyć, że innowator nie konkuruje z imitator, a tylko z innym innowatorem. Podobnie imitator, traci gdy jego przeciwnik stosuje tą samą strategię, co on. Stąd kluczowa w tym wypadku jest koordynacja, albo raczej antykoordynacja działań producentów, służąca dobrobytowi społecznemu.

Opisany powyżej podział gier schumpeterowskich ze względu na wartość parametru  $\beta$ , odpowiada ogólnemu podziałowi gier populacyjnych o dwóch strategiach.

**Definicja 4.18 (Herold, Kuzmics 2020)** *Grę populacyjną  $\mathcal{G}$  o zbiorze strategii  $S = \{s_1, s_2\}$  i macierzy wypłat postaci (4.15), dla której zachodzą nierówności:  $a < c$  oraz  $d < b$ , nazywa się:*

- *grą opartą na konflikcie (conflict game), gdy  $c \geq d$ ;*
- *grą antykoordynacyjną (anti-coordination game), jeśli  $c > d$ .*

Gdy  $c \geq d$ , to niezależnie od wybranej strategii, gracz woli by jego przeciwnik grał strategię  $s_2$  polegającą na unikaniu konfliktu. Natomiast gdy  $c > d$  gracz, który wybrał strategię  $s_2$  wolałby, aby przeciwnik grał agresywną strategię  $s_1$ .

**Spostrzeżenie 4.5** *Dla ustalonych wartości parametrów  $V > 0$ ,  $F > 0$ ,  $\alpha > 0$  oraz  $0 \leq \beta < \alpha$ , które spełniają warunek (4.45):*

- *jeśli  $\beta \leq \frac{V}{2}$ , to gra schumpeterowska jest oparta na konflikcie;*
- *dla  $\beta > \frac{V}{2}$  gra schumpeterowska jest grą antykoordynacyjną.*

W przypadku schumpeterowskiej gry antykoordynacyjnej wybór strategii alternatywnej wobec strategii przeciwnika jest zawsze opłacalny. Zatem, w tego rodzaju grze schumpeterowskiej, gdy jedna ze strategii jest „nadmiernie używana” w populacji, czyli używa jej zbyt duży odsetek graczy, to stosowanie jej przestaje być opłacalne. Z kolei w grze schumpeterowskiej, która jest oparta na konflikcie, nadmierne wysycenie następuje szybko jedynie w przypadku agresywnej strategii innowacyjnej.

Do wskazania różnic pomiędzy tymi dwoma typami gier może posłużyć poniższy przykład, ilustrujący wpływ parametru  $\beta$  na postać systemu schumpeterowskiego oraz średnią wypłatę.



**Przykład 4.2** Niech  $\mathcal{G}$  będzie grą populacyjną ze zbiorem strategii schumpeterowskich  $S = \{I, Z\}$  i funkcją wypłaty określoną macierzą z Tabeli 4.2. Niech  $V = 3$ ,  $F = 10$ ,  $\alpha = 11$ . Wówczas, z warunku (4.60) oraz z przyjętego założenia  $b \geq 0$  wynika, że jeśli  $\beta \in [0, \frac{5}{2})$ , to  $\mathcal{G}$  jest grą schumpeterowską. Przy czym dla  $\beta \in [0, \frac{3}{2})$  gra schumpeterowska jest oparta na konflikcie, a gdy  $\beta \in (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ , to gra jest antykoordynacyjna. Niech dane będą dwie wartości parametru  $\beta$ , dla których rozważa się powyższą grę schumpeterowską:  $\beta_1 = 0$  oraz  $\beta_2 = 2$ .

1. Dla  $\beta_1 = 0$  gra schumpeterowska jest oparta na konflikcie, a macierz gry reprezentuje Tabela 4.5 (lewa strona). Stan schumpeterowski ma postać  $x^* = (\frac{5}{11}, \frac{6}{11})$ , a średnia wypłata w tym stanie wynosi  $\pi_{av}(\frac{5}{11}, \frac{6}{11}) = \frac{9}{11}$ .
2. Macierz gry w Tabeli 4.5 po prawej stronie przedstawia wypłaty gry antykoordynacyjnej dla  $\beta_2 = 2$ . W grze tej ustala się stan schumpeterowski postaci:  $x^* = (\frac{1}{13}, \frac{12}{13})$ , a średnia wypłata wynosi  $\pi_{av}(\frac{1}{13}, \frac{12}{13}) = \frac{20}{13}$ .

|             |   | Producent 2 |                            |             |   | Producent 2 |                            |
|-------------|---|-------------|----------------------------|-------------|---|-------------|----------------------------|
|             |   | I           | Z                          |             |   | I           | Z                          |
| Producent 1 | I | -3, -3      | 4, 0                       | Producent 1 | I | -4, -4      | 2, 2                       |
|             | Z | 0, 4        | $\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$ |             | Z | 2, 2        | $\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$ |

Tabela 4.5: Macierze wypłat gry schumpeterowskiej dla  $V = 3$ ,  $F = 10$  i  $\alpha = 11$ ; gry opartej na konflikcie, dla  $\beta_1 = 0$  (z lewej strony) oraz gry antykoordynacyjnej, gdy  $\beta_2 = 2$  (z prawej strony).

Można zauważyć, między innymi, że:

- większa wartość parametru  $\beta$  w przypadku 2 negatywnie odbija się na odsetku innowatorów (por. część 4.3.6), stąd odsetek innowatorów w systemie schumpeterowskim dla  $\beta_2 = 2$  jest mniejszy, niż gdy  $\beta_1 = 0$ ;
- średnia wypłata w powstałym w grze systemie schumpeterowskim jest wyższa w przypadku gry antykoordynacyjnej, czyli dla  $\beta_2 = 2$ , niż dla gry opartej na konflikcie;

- *gdy  $\beta_1 = 0$  imitator traci, gdy przeciwnik wprowadza innowację (tzn.  $f(Z, I) < f(Z, Z)$ ), dla  $\beta_2 = 2$  przeciwnie, zysk innowatora jest większy, gdy drugi producent decyduje się na działalność innowacyjną (tzn.  $f(Z, I) > f(Z, Z)$ ).*

Gra schumpeterowska, zarówno poprzez swoje strategie, jak i przyjmowane wypłaty, opisuje zachowania producentów, które są charakterystyczne dla schumpeterowskiego rozwoju gospodarczego (por. Schumpeter 1934). Metodologicznie, gry schumpeterowskie stanowią pewną podrodzinę gier populacyjnych o dwóch strategiach, w których istnieje dokładnie jeden, polimorficzny i ewolucyjnie stabilny stan populacji. Przykład 4.2 pokazuje, że rodzina gier schumpeterowskich jest wewnętrznie zróżnicowana i że gry te mogą służyć do badania różnych sytuacji społecznych w których kształtuje się ustalona struktura populacji.

## 4.4. Podsumowanie

W tym rozdziale poszukiwano odpowiedzi na drugie z pytań badawczych postawionych we wstępie do niniejszej rozprawy: Jak zmiana różnorodności gospodarki wpływa na jej ewolucję? W celu uzyskania odpowiedzi na to pytanie, poddano weryfikacji trzecią z zaproponowanych hipotez badawczych, która stwierdza, że im większy przyrost różnorodności w systemie ekonomicznym powoduje wprowadzenie innowacji, tym większa skłonność producentów do jej wprowadzenia. Analiza przeprowadzona w tym rozdziale wykazała, że im większy przyrost różnorodności związany jest z wprowadzeniem innowacji, tym większa ilość producentów podejmuje się działalności innowacyjnej.

Użycie metod ewolucyjnej teorii gier, pozwoliło na wykazanie, że struktura populacji producentów, składającej się zarówno z innowatorów jak i imitatorów, pozostaje stabilna w grach schumpeterowskich. W związku z tym, badanie wpływu przyrostu różnorodności na decyzje dotyczące podjęcia działalności innowacyjnej przez producentów, można przeprowadzić na podstawie analizy ewolucyjnie stabilnego stanu populacji producentów, tzw. stanu schumpeterowskiego. Wykazano, że wzrost różnorodności związany z wprowadzeniem istotnie innowacyjnego planu produkcji obok znanego rozwiązania technologicznego, powoduje zwiększenie się odsetka innowatorów w stanie schumpeterowskim (zob. Wniosek 4.7). Zatem różnorodność ma wpływ na strukturę populacji producentów, a jej wzrost pociąga za sobą wzrost odsetka pro-

ducentów, którzy w systemie ekonomicznym wybierają rozwiązania innowacyjne. Co za tym idzie, trzecia z hipotez badawczych postawionych we wstępie, okazała się być prawdziwa.



# Zakończenie

Celem rozprawy było zbadanie zależności występujących między zmianą różnorodności systemu gospodarczego a jego ewolucją. Do zdefiniowania różnorodności systemu gospodarczego posłużyło w rozprawie pojęcie różnorodności zbioru sformalizowane przez Nehringa i Puppego (2002). Zostało ono wprowadzone do dwóch różnych modeli gospodarki, w których rozważano skończoną liczbę towarów. Pierwszy z modeli czerpał inspirację z teorii równowagi ogólnej, natomiast drugi – z ewolucyjnej teorii gier.

W pierwszej części rozprawy rozpatrywano wpływ zmiany ewolucyjnej w systemie gospodarczym na różnorodność tego systemu, analizując w czasie dyskretnym ewolucję modelu ekonomicznego, w którym działa skończona liczba podmiotów. W modelu tym, w oparciu o atrybuty towarów istotne z punktu widzenia konsumentów, zdefiniowano funkcję różnorodności w przestrzeni towarów. Funkcji tej użyto następnie do analizy zmian ewolucyjnych zachodzących w gospodarce, modelowanych przy użyciu narzędzi teorii projektowania mechanizmów ekonomicznych. W drugiej części rozprawy analizowano konsekwencje zmiany różnorodności w systemie gospodarczym dla ewolucji tego systemu. Badaniu poddano model gospodarki z nieskończoną ilością podmiotów, a zmiany zachodzące w gospodarce analizowano w czasie ciągłym, stosując podejście znane z ewolucyjnej teorii gier. Konkurencję schumpeterowską przedstawiono w postaci gry populacyjnej, w której wypłatach został odzwierciedlony wzrost różnorodności związany z wprowadzaniem innowacji. Wyznaczając ewolucyjnie stabilne stany populacji, zbadano jak wzrost różnorodności związany z wprowadzaniem innowacji zmienia strukturę systemu ekonomicznego, a w szczególności, jak wpływa na odsetek producentów, którzy decydują się na wprowadzenie innowacji.

W pracy wykazano, że wprowadzenie innowacji jest warunkiem koniecznym zwiększenia różnorodności systemu ekonomicznego ze skończoną liczbą podmiotów. Stwierdzono również, że innowacje wprowadzane przez producentów mogą zwiększyć różnorodność systemu

ekonomicznego, o ile nowe rozwiązania technologiczne posiadają takie atrybuty, które są istotne dla konsumentów. Wykazano także, że zanikanie przestarzałych technologii nie musi prowadzić do zmniejszenia różnorodności systemu ekonomicznego. W rozprawie ustalono, że w grze schumpeterowskiej występuje stały odsetek innowatorów, który zależy od przyrostu różnorodności związanego z wprowadzeniem innowacji. Im większy przyrost różnorodności powoduje wprowadzenie innowacji w danym systemie ekonomicznym, tym więcej występuje innowatorów w ewolucyjnie stabilnym stanie populacji producentów, tzw. stanie schumpeterowskim.

Badania, których podsumowanie stanowi niniejsza rozprawa, nie wyczerpują tematu wzajemnego wpływu, jaki na siebie wywierają różnorodność i ewolucja gospodarki. Między innymi, w rozprawie nie analizowano takich mechanizmów ekonomicznych, w wyniku których zmieniają się charakterystyki systemu konsumpcji, w szczególności preferencje konsumentów. Szerokie pole do badania pozostawia również rola różnorodności jako czynnika, który ma wpływ na kształtowanie się populacji producentów. W szczególności otwarty pozostaje problem wpływu zmian różnorodności na kształt populacji producentów, wprowadzających różne, ale wzajemnie od siebie zależne innowacje. Do analizy tego problemu możliwe wydaje się użycie podejścia przedstawionego w pracy (Bielawski, Jakubek 2021).

# Spis literaturey

Abascal M., Baldassarri D., (2020), Diversity and prosocial behavior, *Science* 369(6508), 1183-1187.

Acemoglu D., (2009), *Introduction to modern economic growth*, Princeton University Press.

Aghion P., Howitt P., (1992), A model of growth through creative destruction, *Econometrica* 60(2), 323-351.

Aghion P., Howitt P., (1998), *Endogenous growth theory*, MIT Press, Cambridge, MA, London.

Aghion P., Akcigit U., Howitt P., (2015), The Schumpeterian growth paradigm, *Annual Review of Economics* 7(1), 557-575.

Almudi I., Fatas-Villafranca F., Fernandez-Marquez C.M., Potts J., Vazquez F.J., (2020), Absorptive capacity in a two sector neo-Schumpeterian model: a new role for innovation policy, *Industrial and Corporate Change*, 29(2), 507-531.

Almudi I., Fatás-Villafranca F., (2021), *Coevolution in economic systems*, Cambridge University Press.

Ammann M., Puppe C., (2024), Preference diversity, *KIT Working Paper Series in Economics* 164.

Andersen E. S., (2007), Bridging the gap between Schumpeterian competition and evolutionary game theory, *DRUID Summer Conference*.

Andersen E. S., (2009), *Schumpeter's evolutionary economics*, Anthem Press.

Arrow K. J., Debreu G., (1954), Existence of an equilibrium for a competitive economy, *Econometrica* 22, 265-290.

- Asheim B., Boschma R., Cooke P., (2011), Constructing regional advantage: Platform policies based on related variety and differentiated knowledge bases, *Regional Studies*, 45(7), 893-904.
- Assenza T., Delli Gatti D., Grazzini J., (2015), Emergent dynamics of a macroeconomic agent based model with capital and credit, *Journal of Economic Dynamics and Control* 50(1), 5-28.
- Ayres, R. U., (1994), *Information, entropy, and progress. A new evolutionary paradigm*, American Institute of Physics, New York.
- Bartkowski B., Lienhoop N., Hansjürgens B., (2015), Capturing the complexity of biodiversity: A critical review of economic valuation studies of biological diversity, *Ecological Economics* 113, 1-14.
- Bartkowski B., (2017), Are diverse ecosystems more valuable? Economic value of biodiversity as result of uncertainty and spatial interactions in ecosystem service provision, *Ecosystem Services* 24, 50-57.
- Baumgärtner S., (2004), Measuring the diversity of what? And for what purpose? A conceptual comparison of ecological and economic measures of biodiversity, *Interdisciplinary Institute for Environmental Economics*, Heidelberg.
- Bavetta S., Del Seta M., (2001), Constraints and the measurement of freedom of choice, *Theory and Decision* 50, 213-238.
- Beauchêne D., (2019), Is ambiguity aversion bad for innovation?, *Journal of Economic Theory*, Elsevier, vol. 183(C), 1154-1176.
- Berger W. H., Parker F. L., (1970), Diversity of planktonic foraminifera in deep-sea sediments, *Science* 168(3937), 1345-1347.
- Bervoets S., Gravel N., (2007), Appraising diversity with an ordinal notion of similarity: An axiomatic approach, *Mathematical Social Sciences* 53, 259-273.
- Biblia Jerozolimska, (2006), Pallotinum.
- Bielawski J., Jakubek M., (2021), The interplay between migrants and natives as a determinant of migrants' assimilation: A coevolutionary approach, *Central European Journal of Economic Modelling and Econometrics* 3(3), 213-251.



- Bonus H., (1973), Quasi-Engel curves, diffusion and the ownership of major consumer durables, *Journal of Political Economy*, 81(3), 655-677.
- Boschma R., (2014), Constructing regional advantage and smart specialization: Comparisons of two European policy concepts, *Italian Journal of Regional Science (Scienze Regionali)*, 13(1), 51-68.
- Bossert W., Pattanaik P. K., Xu Y., (2003), Similarity of options and the measurement of diversity, *Journal of Theoretical Politics* 15, 405-421.
- Brown G. W., von Neumann J., (1950), Solutions of games by differential equations, *Annals of Mathematics Studies* 24, 73-79.
- Cantner U., (2016), Foundations of economic change – an extended Schumpeterian approach, *Journal of Evolutionary Economics* 26, 1-736.
- Chartrand G., Zhang P., (2012), *A first course in graph theory*, Dover Publications.
- Cheney E. W., (1966), *Introduction to approximation theory*, Mc Grow Hill, New York.
- Ciałowicz B., (2015), Analysis of consumer innovativeness in an axiomatic approach, *Mathematical Economics* 11(18), 21-32.
- Content J., Frenken K., (2016), Related variety and economic development: a literature review, *European Planning Studies* 24(12), 1-16.
- Content J., Frenken K., Economidou C., (2016), Indicators and growth effects of related variety at the national and regional level in the EU, D3.1 A review paper from task 3.1 on indicators and growth effects of related variety at the national and regional level in the EU, FIRES project, GA 649378.
- Cooke H., Keppo I., Wolf S., (2013), Diversity in theory and practice: A review with application to the evolution of renewable energy generation in the UK, *Energy Policy* 61, 88-95.
- Ćwińczek I., Lipieta A., (2018), Innovative mechanisms in a private ownership economy with a financial market, *Argumenta Oeconomica Cracoviensia* 17, 7-19.

- Dawid H., Harting P., van der Hoog S., Neugart M., (2019), Macroeconomics with heterogeneous agent models: fostering transparency, reproducibility and replication, *Journal of Evolutionary Economics* 29, 467-538.
- Dosi G., Fagiolo G., Roventini A., (2010), Schumpeter meeting Keynes. A policy-friendly model of endogenous growth and business cycles, *Journal of Economic Dynamics and Control* 34(9), 1748-1767.
- Dosi G., Nelson R., (1994), An introduction to evolutionary theories in economics, *Journal of Evolutionary Economics* 4, 153-172.
- Dosi G., Nelson R., (2010), Technical change and industrial dynamics as evolutionary processes, [in:] *Handbook of the Economics of Innovation*, vol.1, [ed.:] Hall B. H., Rosenberg N., North-Holland.
- Erev I, Roth A. E., (1998), Predicting how people play games: Reinforcement learning in experimental games with unique, mixed strategy equilibria, *The American Economic Review* 88(4), 848-881.
- Falniowski F., (2020), Entropy-based measure of statistical complexity of a game strategy, *Entropy* 22(4), 1-13.
- Falniowski F., Mertikopoulos P., (2024), On the discrete-time origins of replicator dynamics: from convergence to instability and chaos, arXiv preprint arXiv:2402.09824, dostęp: 25 września 2024.
- Fatás-Villafranca F., Saura D., Vazquez F. J., (2009), Diversity, persistence and chaos in consumption patterns, *Journal of Bioeconomics* 11(1), 43-63.
- Fontana R., Martinelli A. Nuvolari A., (2021), Regimes reloaded! A reappraisal of Schumpeterian patterns of innovation, *Journal of Evolutionary Economics* 31, 1495-1519.
- Foster J., (2011), Evolutionary macroeconomics: a research agenda, *Journal of Evolutionary Economics* 21(1), 5-28.
- Freeman C., (1982), *The economics of industrial innovations*, Printer.

- Frenken K., van Oort F., Verburg T., (2007), Related variety, unrelated variety and regional economic growth, *Regional Studies* 41(5), 685-697.
- Gerber L. R., Runge M. C., Maloney R. F., Iacona G. D., Drew C. A., Avery-Gomm S., Brazill-Boast J., Crouse D., Epanchin-Niell R. S., Hall S. B., Maguire L. A., Male T., Morgan D., Newman J., Possingham H. P., Rumpff L., Weiss K. C. B., Wilson R. S., Zablan M. A., (2018), Endangered species recovery: A resource allocation problem, *Science* 362(6412), 284-286.
- Gravel N., (2008), What is diversity? Chapter 1, [in:] *Economics, Rational Choice and Normative Philosophy*, [ed.:] Thomas Boylan, Ruvin Gekker, Routledge.
- Hadikhanloo S., Laraki R., Mertikopoulos P., Sorin S., (2022), Learning in nonatomic games, part I: Finite action spaces and population games, *Journal of Dynamics and Games* 9(4), 433-460.
- Hanusch H., Pyka A., (2007), Schumpeter, Joseph Alois (1883-1950), [in:] *Elgar Companion to neo-schumpeterian economics*, [eds:] H. Hanusch, A. Pyka, Edward Elgar.
- Havrda J., Charvat F., (1968), Quantification method of classification processes. Concept of structural  $\alpha$ -entropy, *Kybernetika* Cisló 3, 30-35.
- van Hees M., (2004), Freedom of choice and diversity of options: some difficulties, *Social Choice and Welfare* 22(1), 253-266.
- Helbing D., (1992), A mathematical model for behavioral changes by pair interactions, [in:] *Economic evolution and demographic change: formal models in social sciences*, [eds:] G. Haag, U. Mueller, K. G. Troitzsch, Springer.
- Herold F., Kuzmics C., (2020), The evolution of taking roles, *Journal of Economic Behavior & Organization* 174, 38-63.
- Hill M. O., (1973), Diversity and evenness: a unifying notation and its consequences, *Ecology* 54, 427-431.
- Hirschman A. O., (1964), The paternity of an index, *American Economic Review* 54(5), 761-762.

- Hofbauer J., Sigmund K., (1998), *Evolutionary games and population dynamics*, Cambridge University Press.
- Hofbauer J., Sigmund K., (2003), *Evolutionary Game Dynamics*, *Bulletin of the American Mathematical Society* 40(4), 479-519.
- Hofbauer J., Sandholm W. H., (2009), *Stable games and their dynamics*, *Journal of Economic Theory* 144(4), 1665-1693.
- Holm J., Andersen E. S., Metcalfe J. S., (2016), *Confounded, augmented and constrained replicator dynamics*, *Journal of Evolutionary Economics* 26(4), 803-822.
- Hurwicz L., (1960), *Optimality and informational efficiency in resource allocation processes*, [in:] *Mathematical Methods in the Social Sciences*, [ed.:] Kenneth Arrow, Samuel Karlin, Patrick Suppes, Stanford University Press.
- Hurwicz L., (1972), *On informationally decentralized systems*, [in:] *Decision and Organization. A volume in honor of Jacob Marschak*, [ed.:] McGuire C. B., Radner R., North-Holland Pub. Co.
- Hurwicz L., (1973), *The design of mechanisms for resource allocation*, *American Economic Review Papers and Proceedings* 63, 1-30.
- Hurwicz L., (1986), *Incentive aspects of decentralization*, Chapter 28, [in:] *Handbook of Mathematical Economics*, Volume 3, [ed.:] Arrow K. J., Intriligator M. D., Elsevier.
- Hurwicz L., Radner R., Reiter S., (1975), *A stochastic decentralized resource allocation process: Part I*, *Econometrica* 43(2), 187-221.
- Hurwicz L., Reiter S., (2006), *Designing economic mechanism*, Cambridge University Press.
- Konwencja o różnorodności biologicznej, (1992), *Dz.U.* 2002 nr 184 poz. 1533.
- Kuratowski K., (1962), *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe.
- Kwaśnicki W., (2021), *The role of diversity and tolerance in economic development*, *Journal of Evolutionary Economics* 31, 821-851.

- Lancaster K., (1966a), Change and innovation in the technology of consumption, *The American Economic Review*, 56(1/2), 14–23.
- Lancaster K., (1966b), A new approach to consumer theory, *Journal of Political Economy* 74(2), 132-157.
- Lancaster K., (1977), The measurement of changes in quality, *Review of Income and Wealth* 23(2), 157-172.
- Lancaster K., (1982), Innovative entry: profit hidden beneath the Zero, *The Journal of Industrial Economics* 31(1/2), 41–56.
- Lancaster K., (1990), The economics of product variety: A survey, *Marketing Science* 9(3), 189-206.
- Lipieta A., (2018), The role of imitative mechanisms within the economic evolution, *Economics and Business Review* 18(4), 64-82.
- Lipieta A., (2022), Mechanisms leading to environmental friendly goals - axiomatic approach (w recenzji), artykuł referowany na VIII Hurwicz Workshop on Mechanisms Design, Warszawa, IMPAN, 4-5.11.2022.
- Lipieta A., Cwiężek I., (2022), Mechanisms leading to equilibrium in economy with financial market, *International Journal of Finance and Economics* 1-17, <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/ijfe.2365> 2021.
- Lipieta A., Lipieta A., (2023), Adjustment processes within economic evolution - Schumpeterian approach, *Journal of the Knowledge Economy* 14(3), 3221-3259.
- Lipieta A., Malawski A., (2016), Price versus quality competition: in search for Schumpeterian evolution mechanisms, *Journal of Evolutionary Economics* 26(5), 1137-1171.
- Lipieta A., Malawski A., (2018), Comparative analysis of mechanisms of schumpeterian evolution, *Journal of Entrepreneurship, Management and Innovation* 14(1), 7-28.
- Lipieta A., Malawski A., (2021), Eco-mechanisms within economic evolution: Schumpeterian approach, *Journal of Economic Structures* 10.

- Lipieta A., Pliś E., (2022), Diversity and mechanisms of economic evolution, *Journal of Evolutionary Economics* 32, 1265-1286.
- Łojasiewicz S., (1976), *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe.
- Magurran A. E., (2013), *Measuring biological diversity*, John Wiley & Sons.
- Myerson R. B., (1979), Incentive compatibility and the bargaining problem, *Econometrica* 47(1), 61-73.
- Myerson R. B., (1981), Optimal auction design, *Mathematics of Operations Research* 6(1), 58-73.
- Malawski A., (1999), *Metoda aksjomatyczna w ekonomii: studia nad strukturą i ewolucją systemów ekonomicznych*, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław.
- Malawski A., (2013), *Innovative economy as the object of investigation in theoretical economics*, Cracow University of Economics Press.
- Malawski A., Pliś E., (2007), *Koncepcje różnorodności w ekonomii teoretycznej [in:] Poznać człowieka*, [eds.:] J. Filek, L. Sosenko, Instytut Myśli J. Tischnera, Kraków.
- Malawski A., Woerter M., (2006), *Diversity structure of the schumpeterian evolution: an axiomatic approach*, KOF Swiss Economic Institute, Zurich.
- Malerba F., (1992), Learning by firms and incremental technical change, *The Economic Journal* 102(413), 845-859.
- Malerba F., Orsenigo L., (1995), Schumpeterian patterns of innovation, *Cambridge Journal of Economics* 19, 47-65.
- Mas-Colell A., Whinston M. D., Green J. R., (1995), *Microeconomic theory*, Oxford University Press, New York.
- Maskin E., (1999), Nash equilibrium and welfare optimality, *The Review of Economic Studies* 66(1), 23-38.

- Maskin E., Riley J., (1984), Optimal auctions with risk averse buyers. *Econometrica* 52(6), 1473-1518.
- Menger C., (1871), *Principles of economics*, Ludwig von Mises Institute.
- Metcalf J. S., (1994), Evolutionary economics and technology policy, *The Economic Journal* 104, 931-944.
- Metcalf J. S., Gibbons M., (1991), The diffusion of the new technologies: A condition for renewed economic growth, *Technology and Productivity: The Challenge for Economic Policy* 22, 485.
- Morgenstern O., von Neumann J., (1944), *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press.
- Nayak I. K., (1985), On diversity measures based on entropy functions, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 14(1), 203-215.
- Neffke F., Henning M., Boschma R., (2011), How do regions diversify over time? Industry relatedness and the development of new growth paths in regions, *Economic Geography*, 87(3), 237-265.
- Nelson R., (2016), Behaviour and cognition of economic actors in evolutionary economics, *Journal of Evolutionary Economics* 26, 737-751.
- Nelson R., Winter S., (1982), *An evolutionary theory of economic change*, The Belknap Press of Harvard University Press.
- Nehring K., Puppe C., (2002), A theory of diversity, *Econometrica* 70(3), 1155-1198.
- Nehring K., Puppe C., (2003), Diversity and dissimilarity in lines and hierarchies, *Mathematical Social Sciences* 45(2), 167-183.
- Nehring K., Puppe C., (2004a), Modelling cost complementarities in terms of joint production, *Journal of Economic Theory* 118(2), 252-264.
- Nehring K., Puppe C., (2004b), Modelling phylogenetic diversity, *Resource and Energy Economics* 26(2), 205-235.

- Nehring K., Puppe C., (2009), Diversity, Chapter 12, [in:] Handbook of Rational and Social Choice, [ed.:] P. Anand, P. Pattanaik, C. Puppe, Oxford University Press, Oxford.
- Nowak M. A., (2006), Evolutionary dynamics: exploring the equations of life, Harvard University Press.
- Page S. E., (2011), Diversity and complexity, Princeton University Press.
- Pattanaik P. K., Xu Y., (2000), On diversity and freedom of choice, Mathematical Social Sciences 40(2), 123-130.
- Pliś E., (2020), Diversity and innovation in economic evolution, Central European Journal of Economic Modelling and Econometrics 12(4), 347-367.
- Platkowski T., (2012), Wstęp do teorii gier, Uniwersytet Warszawski.
- Pyka A., Saviotti P. P., Nelson R. R., (2018), Evolutionary perspectives on long run economic development, [in:] Modern evolutionary economics, [ed.:] Nelson R. R., Dosi G, Helfat C., Pyka A., Saviotti P. P., Lee K., Dopfer K., Malerba F., Winter S., Cambridge University Press.
- Rényi A., (1961), On measures of entropy and information, Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume 1, University of California Press.
- Romer P. M., (1986), Increasing returns and long-run growth, Journal of political economy 94(5), 1002-1037.
- Romer P. M., (1992), Two strategies for economic development: using ideas and producing ideas, The World Bank Economic Review 6(suppl1), 63-91.
- Roth A. E., Erev I, (1995), Learning in extensive-form games: Experimental data and simple dynamic models in the intermediate term, Games and Economic Behavior 8(1), 164-212.
- Roth A. E., Sönmez T., Ünver M.U., (2004), Kidney exchange, Quarterly Journal of Economics 119(2), 457-488.
- Safarzyńska K., van den Bergh J. C. J. M., (2010), Evolutionary models in economics: a survey of methods and building blocks, Journal of Evolutionary Economics 20(3), 329-373.



- Safarzyńska K., van den Bergh J. C. J. M., (2011) Beyond replicator dynamics: Innovation–selection dynamics and optimal diversity, *Journal of Economic Behavior & Organization*, 78(3), 229-245.
- Sandholm W. H., (2005), Excess payoff dynamics and other well-behaved evolutionary dynamics, *Journal of Economic Theory* 124(2), 149-170.
- Sandholm W. H., (2010a), Pairwise comparison dynamics and evolutionary foundations for Nash equilibrium, *Games* 1, 3-17.
- Sandholm W. H., (2010b), *Population games and evolutionary dynamics*, MIT Press.
- Sandholm W. H., (2010c), Local stability under evolutionary game dynamics, *Theoretical Economics* 5, 27-50.
- Saviotti P. P., (2001), Variety, growth and demand, *Journal of Evolutionary Economics* 11, 119-142.
- Saviotti P., Mani G., (1995), Competition, variety and technological evolution: a replicator dynamics model, *Journal of Evolutionary Economics* 5(4), 369-392.
- Saviotti P. P., Pyka A., (2004), Economic development by the creation of new sectors, *Journal of Evolutionary Economics* 14, 1-35.
- Saviotti P. P., Pyka A., (2009), Product variety, competition and economic growth, Chapter 6, [in:] *Schumpeterian Perspectives on Innovation, Competition and Growth*, [ed.:] Cantner U., Gaffard J-L., Nesta L., Springer.
- Saviotti P. P., Pyka A., Jun B., (2020), Diversification, structural change, and economic development, *Journal of Evolutionary Economics* 30(5), 1301-1335.
- Schlag K. H., (1994), When does evolution lead to efficiency in communication games?, ESRC Centre on Economics Learning and Social Evolution.
- Schlag K. H., (1998), Why imitate, and if so, how?: a boundedly rational approach to multi-armed bandits, *Journal of Economic Theory* 78(1), 130-156.
- Schumpeter J. A., (1912), *Die Theorie der wirtschaftlichen Entwicklung*, Berlin 1912.

- Schumpeter J. A., (1934), *The theory of economic development. An inquiry into profits, capital, credit, interest, and the business cycle*, Harvard University Press.
- Schumpeter J. A., (1942), *Capitalism, socialism and democracy*, wyd. polskie: *Kapitalizm, socjalizm, demokracja*, tłum. M. Rusiński, (1995), Polskie Wydawnictwo Naukowe.
- Shannon C. E., (1948), *A mathematical theory of communication*, Bell System Technical Journal 27(3), 379-423.
- Sher I., (2018), *Evaluating allocations of freedom*, The Economic Journal 128(612), F65-F94.
- Sher I., (2020), *Neutral freedom and freedom as control*, Social Choice and Welfare 56(1), 21-56.
- Shorrocks A. F., (1984), *Inequality decomposition by population subgroups*, Econometrica 1369-1385.
- Silverberg G., Dosi G., Orsenigo L., (1988), *Innovation, diversity and diffusion: a self-organisation model*, The Economic Journal 98(393), 1032-1054.
- Simon H. A., (1955), *A behavioral model of rational choice*, The Quarterly Journal of Economics 69(1), 99-118.
- Simpson E. H., (1949), *Measurement of diversity*, Nature 163(4148), 688.
- Słownik języka polskiego, <https://sjp.pwn.pl/sjp/gospodarka;2462496.html>, dostęp 30.09.2024.
- Smith A., (1776), *An inquiry into the nature and causes of the wealth of nations*, wyd. polskie: *Badania nad naturą i przyczynami bogactwa narodów*, tłum. O. Einfeld, S. Wolff, (1954), Warszawa.
- Smith M. J., (1984), *The stability of a dynamic model of traffic assignment – an application of a method of Lyapunov*, Transportation Science 18(3), 245-252.
- Smith J., Price G., (1973), *The Logic of Animal Conflict*, Nature 246, 15-18.
- Stirling A., (1998), *On the economics and analysis of diversity*, Science Policy Research Unit (SPRU), Electronic Working Papers Series 28, 1-156.

- Stirling A., (2007), A general framework for analysing diversity in science, technology and society, *Journal of the Royal Society Interface* 4(15), 707-719.
- Tatarkiewicz W., (1970), *Historia filozofii*, t. I-III, Państwowe Wydawnictwo Naukowe.
- Taylor P. D., Jonker L. B., (1978), Evolutionarily stable strategies and game dynamics, *Mathematical Biosciences* 40, 145-156.
- Thomas B., (1984), Evolutionary stability: states and strategies, *Theoretical Population Biology* 26, 49-67.
- Tisdell C., (1999), Diversity and economic evolution: failures of competitive economic systems, *Contemporary Economic Policy* 17(2), 156-165.
- Tomezsko P. J., Corbin V. D., Gupta P., Swaminathan H., Glasgow M., Persad S., ... & Rouskin S., (2020), Determination of RNA structural diversity and its role in HIV-1 RNA splicing, *Nature* 582(7812), 438-442.
- Tsallis C., (1988), Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics, *Journal of Statistical Physics* 52, 479-487.
- Walras L., (1874), *Éléments d'économie politique pure*, wyd. angielskie: *Elements of theoretical economics*, tłum. D. A. Walker, J. van Daal, Cambridge University Press 2014.
- Webb J. N., (2007), *Game theory. Decisions, interaction and evolution*, Springer London.
- Weibull J. W., (1995), *Evolutionary game theory*, MIT Press.
- Weintraub E. R., (1979), *Microfoundations: the compatibility of microeconomics and macroeconomics*, Cambridge University Press.
- Weitzman M. L., (1992), On diversity, *Quarterly Journal of Economics* 107(2), 363-405.
- Weitzman M. L., (1998), The Noah's ark problem, *Econometrica* 66(6), 1279-1298.
- Wiener N., (1948), *Cybernetics or control and communication in the animal and the machine*, Technology Press.

- Witt U., (1996), "A Darwinian revolution" in economics?, *Journal of Institutional and Theoretical Economics* 152(4), 707-715.
- Witt U., (1999), Bioeconomics as economics from a Darwinian perspective, *Journal of Bioeconomics* 1, 1999, 19-34.
- Woerter M., (2009), Industry diversity and its impact on the innovation performance of firms, *Journal of Evolutionary Economics* 19(5), 675-700.
- Young A .A., (1928), Increasing returns and economic progress, *History of Economic Thought Articles* 38, 527-542.